

Informatica – LMM

A.A. 2007/08 - Terzo appello, 10 giugno 2008

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO:

- hai a disposizione 3 ore; non si possono consultare né libri né appunti e non si possono usare calcolatrici; il punteggio pieno è dato solo se l'esercizio è svolto completamente, in modo chiaro, e se sono chiari i passaggi;
- se un esercizio non viene svolto, scrivi chiaramente sul foglio “esercizio n non svolto”.

Esercizio 1

Si definisca una successione tramite la regola $a_0 = 2, a_1 = 1$ e, per ogni $n \geq 1, a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}$. Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \geq 3^{n-1}$$

[Facoltativo: si trovi una formula per il termine generale a_n]

Esercizio 2

- Quanti sono gli insiemi $X \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ che contengono esattamente 10 numeri pari e 15 numeri dispari?
- Quanti sono gli insiemi $Y \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ che contengono almeno 47 numeri pari?
- Quanti sono gli insiemi $Z \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ con questa proprietà: se $m \in Z$ e $m \leq 48$ allora $m + 2 \in Z$.

Esercizio 3

Si trovino tutte le coppie $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che soddisfano la seguente equazione:

$$342x + 1414y = 52$$

Dire se è vero o falso che, per tutte le coppie (x, y) che risolvono l'equazione, vale

$$y \equiv 1 \pmod{3}$$

Esercizio 4

Sia $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Diciamo che R è una relazione funzionale (su \mathbb{N}) se vale la seguente proprietà:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} ((x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \implies y = z).$$

(i) Stabilire quali degli insiemi R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 sono relazioni funzionali:

- $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$;
- $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x + x\}$;
- $R_3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$;
- $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$;
- $R_5 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 1)\}$.

(ii) Date due relazioni funzionali $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $Q \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, stabilire se $R \cup Q$ è sempre una relazione funzionale. In caso di risposta positiva la si motivi. In caso contrario si trovi in controesempio.

(iii) Date due relazioni funzionali $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $Q \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, stabilire se $R \cap Q$ è sempre una relazione funzionale. In caso di risposta positiva la si motivi. In caso contrario si trovi in controesempio.