Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica
Prova scritta del 29 Maggio 2003

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

Esercizio 1. Siano A, B e C tre insiemi assegnati. Usando esclusivamente i simboli di unione $\cup$, intersezione $\cap$, differenza insiemistica $\setminus$, insieme vuoto $\emptyset$, inclusione $\subseteq$, uguaglianza $=$, non uguaglianza $\neq$, e le parentesi, si formalizzino i seguenti enunciati: (Attenzione: *non* si può usare il simbolo $\in$ di appartenenza).

1. Ogni elemento di C appartiene a B o ad A.
2. Non vi sono elementi di B che appartengono ad A ma non a C.

Esercizio 2. Nel linguaggio dei numeri naturali contenente i simboli di somma $+$, prodotto $\cdot$, ordine $<$, predicato di divisibilità $|$, e il predicato $P(x)$ per "x è un numero primo", si formalizzi il seguente enunciato:

1. Esiste un divisore primo di 121 maggiore di 10.
2. Usando le usuali notazioni insiemistiche (oltre ai simboli menzionati sopra), si scriva una espressione che denoti l'insieme di tutti i numeri $n \in \mathbb{N}$ che hanno un divisore primo maggiore di 10.

Esercizio 3. Le estrazioni del lotto consistono nell'estrazione di 5 numeri distinti dall'insieme dei 90 numeri interi da 1 a 90 (*non* conta l'ordine con cui sono estratti).

- Quante sono tutte le possibili estrazioni?

Marco gioca i numeri 15, 30, 45, 60 e 75.

- Quante sono le possibili estrazioni che non contengono alcuno dei numeri da lui giocati?
- Quante sono le estrazioni che contengono esattamente due dei numeri da lui giocati?

Esercizio 4.

1. Sia g la funzione dall'insieme $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ in se stesso che manda x in $4x \mod 8$ (cioè $g(x)$ è il resto della divisione di $4x$ per 8). Determinare se g è iniettiva, surgettiva, biunivoca.
2. Sia h la funzione dall'insieme $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ in se stesso che manda x in $3x \mod 8$. Determinare se h è iniettiva, surgettiva, biunivoca.
3. Sia f la funzione dall'insieme $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ in se stesso che manda x in $2x+5$ modulo 7. Dimostrare che f è invertibile. Dimostrare inoltre che esistono $a, b \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ tali che
$f^{-1}(x) = ax + b \mod 7$. Trovare tali numeri a e b.

Esercizio 5. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $n^n \geq n!$.