Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 6 Nov. 2002

COGNOME E NOME

MATRICOLA **CORSO** **AULA**

Firma

Nota: Giustificare le risposte.

Esercizio 1.

- Stabilire se la seguente formula è o no una tautologia: $[A \to (B \vee C) \wedge (\neg B \wedge \neg C)] \to \neg A$.
- Stabilire se Q è conseguenza logica di $(P \to Q) \wedge (\neg P \to Q)$.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti 5 formule ed i seguenti 5 enunciati.

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \to f(x) \neq 0)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) \leq 0 \to x = 0)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}(f(x) < 0 \wedge x < 0)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) > 0 \to x \neq 0)$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}\ (f(x) = 0 \wedge x > 0)$.

a. La funzione f assume un valore non positivo sul numero 0.
b. La funzione f si annulla su qualche numero positivo.
c. Su qualche numero diverso da zero, la funzione f assume valori non positivi.
d. La funzione f non si annulla mai su numeri reali positivi.
e. C'è un numero non negativo la cui immagine mediante f è un numero positivo.

- Individuare, se ve ne sono, le coppie costituite da una formula ed un enunciato aventi lo stesso significato (per ogni coppia specificare il numero della formula e la lettera dell'enunciato corrispondente).
- Individuare, se ve ne sono, le coppie di formule che sono una equivalente alla negazione dell'altra (per ogni coppia di formule specificare i due numeri corrispondenti).

Esercizio 3. Si considerino le seguenti funzioni:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(x) = 3x + 5$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$;
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 3x + 5$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = x^2 + 7$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
4. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione composizione di g con h, cioè $\varphi = h \circ g$.

- Stabilire se le funzioni f, g, h e φ siano iniettive, surgettive o biunivoche e, nei casi possibili, determinare l'inversa della funzione;
- Determinare l'immagine di h, cioè l'insieme $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}\ h(x) = y\}$;
- Determinare le controimmagini di $y = 8$ mediante φ, cioè l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = 8\}$.

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, vale l'uguaglianza

$$3 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \ldots + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^n = \frac{5 \cdot (5^n - 2^n)}{2^n}$$

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 6 Nov. 2002

COGNOME E NOME

MATRICOLA **CORSO** **AULA**

Firma

Nota: Giustificare le risposte.

Esercizio 1.

- Stabilire se la seguente formula è o no una tautologia: $[C \to (A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)] \to \neg C$.
- Stabilire se P è conseguenza logica di proposizione $(Q \to P) \wedge (\neg Q \to P)$.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti 5 formule ed i seguenti 5 enunciati.

1. $f(0) > 0$.	a. Su tutti i numeri diversi da zero, la funzione f assume valori positivi.
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \to f(x) \neq 0)$.	b. C'è un numero non negativo la cui immagine mediante f è un numero positivo.
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) > 0 \to x < 0)$.	c. Ci sono numeri negativi dove la funzione f assume valori negativi.
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) \leq 0 \to x = 0)$.	d. La funzione f assume valori positivi solo su numeri negativi.
5. $\exists x \in \mathbb{R}\ (x \geq 0 \wedge f(x) > 0)$.	e. La funzione f si annulla su qualche numero positivo.

- Individuare, se ve ne sono, le coppie costituite da una formula ed un enunciato aventi lo stesso significato (per ogni coppia specificare il numero della formula e la lettera dell'enunciato corrispondente).
- Individuare, se ve ne sono, le coppie di formule che sono una equivalente alla negazione dell'altra (per ogni coppia di formule specificare i due numeri corrispondenti).

Esercizio 3. Si considerino le seguenti funzioni:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(x) = 4x + 5$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$;
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 4x + 5$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = x^2 + 6$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
4. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione composizione di g con h, cioè $\varphi = h \circ g$.

- Stabilire se le funzioni f, g, h e φ siano iniettive, surgettive o biunivoche e, nei casi possibili, determinare l'inversa della funzione;
- Determinare l'immagine di h, cioè l'insieme $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}\ h(x) = y\}$;
- Determinare le controimmagini di $y = 7$ mediante φ, cioè l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = 7\}$.

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, vale l'uguaglianza

$$2 \cdot \frac{4}{7} + 2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3 + \ldots + 2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^n = \frac{8 \cdot (7^n - 4^n)}{3 \cdot 7^n}$$

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 6 Nov. 2002

COGNOME E NOME

MATRICOLA **CORSO** **AULA**

Firma

Nota: Giustificare le risposte.

Esercizio 1.

- Stabilire se la seguente formula è o no una tautologia: $[P \to (Q \vee R) \wedge (\neg Q \wedge \neg R)] \to \neg P$.
- Stabilire se A è conseguenza logica di $(B \to A) \wedge (\neg B \to A)$.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti 5 formule ed i seguenti 5 enunciati.

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) \geq 0 \vee x \geq 0)$.	a. Su qualche numero diverso da zero, la funzione f assume valori non positivi.
2. $\exists x \in \mathbb{R}(x \neq 0 \wedge f(x) \leq 0)$.	b. La funzione f assume un valore positivo sul numero 0.
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) > 0 \to x \neq 0)$.	c. Su tutti i numeri diversi da zero, la funzione f assume valori positivi.
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) \leq 0 \to x = 0)$.	d. Non ci sono numeri reali negativi sui quali f assume valori negativi.
5. $\exists x \in \mathbb{R}\ (f(x) = 0 \wedge x > 0)$.	e. C'è un numero non negativo la cui immagine mediante f è un numero positivo.

- Individuare, se ve ne sono, le coppie costituite da una formula ed un enunciato aventi lo stesso significato (per ogni coppia specificare il numero della formula e la lettera dell'enunciato corrispondente).
- Individuare, se ve ne sono, le coppie di formule che sono una equivalente alla negazione dell'altra (per ogni coppia di formule specificare i due numeri corrispondenti).

Esercizio 3. Si considerino le seguenti funzioni:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(x) = 3x + 4$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$;
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 3x + 4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = x^2 - 3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
4. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione composizione di g con h, cioè $\varphi = h \circ g$.

- Stabilire se le funzioni f, g, h e φ siano iniettive, surgettive o biunivoche e, nei casi possibili, determinare l'inversa della funzione;
- Determinare l'immagine di h, cioè l'insieme $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}\ h(x) = y\}$;
- Determinare le controimmagini di $y = 6$ mediante φ, cioè l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = 6\}$.

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, vale l'uguaglianza

$$4 \cdot \frac{5}{3} + 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \ldots + 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n = \frac{10 \cdot (5^n - 3^n)}{3^n}$$

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 6 Nov. 2002

COGNOME E NOME

MATRICOLA **CORSO** **AULA**

Firma

Nota: Giustificare le risposte.

Esercizio 1.

- Stabilire se la seguente formula è o no una tautologia: $[R \to (P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)] \to \neg R$.
- Stabilire se B è conseguenza logica di proposizione $(A \to B) \wedge (\neg A \to B)$,.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti 5 formule ed i seguenti 5 enunciati.

1. $\exists x \in \mathbb{R}\ (f(x) = 0 \wedge x > 0)$.	a. C'è un numero non negativo la cui immagine mediante f è un numero positivo.
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) > 0 \to x \neq 0)$.	b. Ci sono numeri negativi dove la funzione f assume valori negativi.
3. $\exists x \in \mathbb{R}(f(x) < 0 \wedge x < 0)$.	c. La funzione f si annulla su qualche numero positivo.
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) > 0 \to x < 0)$.	d. Non ci sono numeri reali negativi sui quali f assume valori negativi.
5. $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) \geq 0 \vee x \geq 0)$.	e. Su tutti i numeri diversi da zero, la funzione f assume valori positivi.

- Individuare, se ve ne sono, le coppie costituite da una formula ed un enunciato aventi lo stesso significato (per ogni coppia specificare il numero della formula e la lettera dell'enunciato corrispondente).
- Individuare, se ve ne sono, le coppie di formule che sono una equivalente alla negazione dell'altra (per ogni coppia di formule specificare i due numeri corrispondenti).

Esercizio 3. Si considerino le seguenti funzioni:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(x) = 5x + 6$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$;
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 5x + 6$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = x^2 + 9$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
4. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione composizione di g con h, cioè $\varphi = h \circ g$.

- Stabilire se le funzioni f, g, h e φ siano iniettive, surgettive o biunivoche e, nei casi possibili, determinare l'inversa della funzione;
- Determinare l'immagine di h, cioè l'insieme $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}\ h(x) = y\}$;
- Determinare le controimmagini di $y = 13$ mediante φ, cioè l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = 13\}$.

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, vale l'uguaglianza

$$2 \cdot \frac{8}{3} + 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 + ... + 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n = \frac{16 \cdot (8^n - 3^n)}{5 \cdot 3^n}$$