

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 19 giugno 2002 - N. 1

COGNOME E NOME

MATRICOLA

CORSO

AULA

Firma

Esercizio 1. Si trovi una forma normale prenessa dell'enunciato

$$\neg \forall x [(\exists y (x > y)) \rightarrow x > 0]$$

e si stabilisca se esso costituisce una affermazione vera o falsa sui numeri naturali.

Esercizio 2. Usando le notazioni logiche, le costanti numeriche $0, 1, 2, \dots$, le operazioni di somma e prodotto, e la relazione \leq , si esprima l'enunciato

“C”è uno e un solo multiplo di 5 nell'intervallo tra 21 e 29”

Esercizio 3. Stabilire se le seguenti funzioni da \mathbf{Z}^2 ad \mathbf{Z} sono iniettive, surgettive, biunivoche.

1. $f(x, y) = 21x + 5y$

2. $g(x, y) = 3x + 6y$.

Esercizio 4. Si consideri l'insieme $X = \{1, 2, \dots, 20\}$ dei numeri naturali compresi fra 1 e 20.

1. Quanti sono i sottoinsiemi di X che contengono esattamente 3 elementi dispari?
2. Quanti sono i sottoinsiemi di X che contengono almeno un multiplo di 5?
3. Quanti sono i sottoinsiemi A di X tali che $A \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = X$?

NOTA: la risposta va giustificata, ed è sufficiente indicare un'espressione algebrica, senza svolgere i conti.

Esercizio 5. Determinare per quali valori dell'intero n la congruenza

$$21x \equiv 15 \pmod{11n}$$

ha soluzione, e risolverla per $n = 24$.

Esercizio 6. Sia f_n la successione definita per ricorrenza ponendo $f_0 = 3$, $f_1 = 4$, e $f_{n+1} = (f_n + f_{n-1})/2$.

1. Dimostrare che $3 \leq f_n \leq 4$
2. Dimostrare che $n \geq 2$ allora f_n è un razionale della forma $\frac{r}{2^{n-1}}$, con r dispari;
3. Definiamo una successione g_n ponendo $g_n = f_{2n}$. Dimostrare che la successione g_n è crescente.

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 19 giugno 2002 - N. 2

COGNOME E NOME

MATRICOLA

CORSO

AULA

Firma

Esercizio 1. Si trovi una forma normale prenessa dell'enunciato

$$\neg \forall x [(\forall y (x \cdot y = 0)) \rightarrow x = 0]$$

e si stabilisca se esso costituisce una affermazione vera o falsa sui numeri naturali.

Esercizio 2. Usando le notazioni logiche, le costanti numeriche $0, 1, 2, \dots$, le operazioni di somma e prodotto ed esponenziazione, e la relazione \leq , si esprima l'enunciato

“C'è una ed una sola potenza di due nell'intervallo tra 10 e 30.”

Esercizio 3. Stabilire se le seguenti funzioni da \mathbf{Z}^2 ad \mathbf{Z} sono iniettive, surgettive, biunivoche.

1. $f(x, y) = 5x + 15y$

2. $g(x, y) = 7x + 9y$.

Esercizio 4. Si consideri l'insieme $X = \{1, 2, \dots, 20\}$ dei numeri naturali compresi fra 1 e 20.

1. Quanti sono i sottoinsiemi di X che contengono esattamente 6 numeri pari?
2. Quanti sono i sottoinsiemi di X che contengono almeno un multiplo di 4?
3. Quanti sono i sottoinsiemi A di X tali che $A \cup \{5, 10, 15, 20\} = X$?

NOTA: la risposta va giustificata, ed è sufficiente indicare un'espressione algebrica, senza svolgere i conti.

Esercizio 5. Determinare per quali valori dell'intero n la congruenza

$$33x \equiv 21 \pmod{7n}$$

ha soluzione, e risolverla per $n = 15$.

Esercizio 6. Sia f_n la successione definita per ricorrenza ponendo $f_0 = 4$, $f_1 = 3$, e $f_{n+1} = (f_n + f_{n-1})/2$.

1. Dimostrare che $3 \leq f_n \leq 4$
2. Dimostrare che se $n \geq 2$ allora f_n è un razionale della forma $\frac{r}{2^{n-1}}$, con r dispari;
3. Definiamo una successione g_n ponendo $g_n = f_{2n}$. Dimostrare che la successione g_n è decrescente.

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 19 giugno 2002 - N. 3

COGNOME E NOME

MATRICOLA

CORSO

AULA

Firma

Esercizio 1. Si trovi una forma normale prenessa dell'enunciato

$$\neg \exists x [(\exists y (x < y)) \rightarrow x = 0]$$

e si stabilisca se esso costituisce una affermazione vera o falsa sui numeri naturali.

Esercizio 2. Usando le notazioni logiche, le costanti numeriche $0, 1, 2, \dots$, le operazioni di somma e prodotto, e la relazione \leq , si esprima l'enunciato

“C”è uno e un solo cubo nell'intervallo di numeri interi tra 10 e 20.”

Esercizio 3. Stabilire se le seguenti funzioni da \mathbf{Z}^2 ad \mathbf{Z} sono iniettive, surgettive, biunivoche.

1. $f(x, y) = 2x + 4y$

2. $g(x, y) = 4x + 3y$.

Esercizio 4. Si consideri l'insieme $X = \{1, 2, \dots, 24\}$ dei numeri naturali compresi fra 1 e 24.

1. Quanti sono i sottoinsiemi di X che contengono esattamente 4 multipli di 3?

2. Quanti sono i sottoinsiemi di X che contengono almeno un multiplo di 6?

3. Quanti sono i sottoinsiemi A di X tali che $A \cup \{4, 8, 12, 16, 20, 24\} = X$?

NOTA: la risposta va giustificata, ed è sufficiente indicare un'espressione algebrica, senza svolgere i conti.

Esercizio 5. Determinare per quali valori dell'intero n la congruenza

$$39x \equiv 21 \pmod{5n}$$

ha soluzione, e risolverla per $n = 18$.

Esercizio 6. Sia f_n la successione definita per ricorrenza ponendo $f_0 = 3$, $f_1 = 4$, e $f_{n+1} = (f_n + f_{n-1})/2$.

1. Dimostrare che $3 \leq f_n \leq 4$

2. Dimostrare che se $n \geq 2$ allora f_n è un razionale della forma $\frac{r}{2^{n-1}}$, con r dispari;

3. Definiamo una successione g_n ponendo $g_n = f_{2n+1}$. Dimostrare che la successione g_n è decrescente.

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 19 giugno 2002 - N. 4

COGNOME E NOME

MATRICOLA

CORSO

AULA

Firma

Esercizio 1. Si trovi una forma normale prenessa dell'enunciato

$$\neg \exists x[(\forall y(x + y = 0)) \rightarrow x = 0]$$

e si stabilisca se esso costituisce una affermazione vera o falsa sui numeri naturali.

Esercizio 2. Usando le notazioni logiche, le costanti numeriche $0, 1, 2, \dots$, le operazioni di somma e prodotto, e la relazione \leq , si esprima l'enunciato

“C”è uno ed un solo quadrato tra gli interi compresi tra 10 e 20.”

Esercizio 3. Stabilire se le seguenti funzioni da \mathbf{Z}^2 ad \mathbf{Z} sono iniettive, surgettive, biunivoche.

1. $f(x, y) = 6x + 5y$

2. $g(x, y) = 3x + 12y$.

Esercizio 4. Si consideri l'insieme $X = \{1, 2, \dots, 24\}$ dei numeri naturali compresi fra 1 e 24.

1. Quanti sono i sottoinsiemi di X che contengono esattamente 2 multipli di 6?

2. Quanti sono i sottoinsiemi di X che contengono almeno un multiplo di 3?

3. Quanti sono i sottoinsiemi A di X tali che $A \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = X$?

NOTA: la risposta va giustificata, ed è sufficiente indicare un'espressione algebrica, senza svolgere i conti.

Esercizio 5. Determinare per quali valori dell'intero n la congruenza

$$24x \equiv 39 \pmod{11n}$$

ha soluzione, e risolverla per $n = 15$.

Esercizio 6. Sia f_n la successione definita per ricorrenza ponendo $f_0 = 4$, $f_1 = 3$, e $f_{n+1} = (f_n + f_{n-1})/2$.

1. Dimostrare che $3 \leq f_n \leq 4$

2. Dimostrare che se $n \geq 2$ allora f_n è un razionale della forma $\frac{r}{2^{n-1}}$, con r dispari;

3. Definiamo una successione g_n ponendo $g_n = f_{2n+1}$. Dimostrare che la successione g_n è crescente.