

Cognome e nome:
Numero di matricola:
Corso e Aula:
Firma:
E-mail (per eventuali comunicazioni):

Esercizio 1.

1. Scrivere formalmente, utilizzando esclusivamente i simboli logici e le operazioni aritmetiche, il seguente enunciato P : “Il massimo comun divisore di a e b divide c ”.
2. Per ciascuno dei seguenti enunciati Q_1, Q_2, Q_3 , determinare se l’implicazione $Q_i \rightarrow P$ è vera o falsa nell’universo dei numeri naturali (dando una dimostrazione o trovando un controesempio).

$$Q_1 : “\exists x \ ax = c” ; \quad Q_2 : “\exists x \ abx = c^2” ; \quad Q_3 : “ac = b^2” .$$

Esercizio 2. Sia A un insieme, $B \subseteq A$ un suo sottoinsieme, e $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ l’insieme delle parti di A . Si consideri la funzione $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ definita da $F(X) = (A \setminus X) \cap B$. (Si ricordi che $A \setminus X$ denota la differenza insiemistica $A \setminus X = \{a \in A \mid a \notin X\}$). Dimostrare che:

1. $F(X) = B \setminus X$;
2. $(F \circ F \circ F)(X) = F(X)$.

Esercizio 3. Sia A un insieme di 15 elementi. Determinare quante sono:

1. le coppie di sottoinsiemi (X, Y) di A tali che X abbia 4 elementi, Y ne abbia 3, e $X \cap Y = \emptyset$;
2. le coppie di sottoinsiemi (X, Y) di A tali che X abbia 5 elementi, Y ne abbia 9, e $X \subseteq Y$.

Esercizio 4. Sia a un numero reale diverso da 0 e 1. Definiamo per ricorrenza la successione f , ponendo $f_0 = a$ e $f_{n+1} = f_n^2 - f_n + 1$. Dimostrare che:

1. $\forall n \ f_n \neq 0$;
2. $\forall n \ f_n \neq 1$;
3. $\forall n \ f_{n+1} > f_n$.

Esercizio 5. Si consideri la congruenza $69x \equiv 57 \pmod{75}$.

1. Determinarne le soluzioni;
2. Determinare il numero delle soluzioni x tali che $100 \leq x \leq 999$.