Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica
Soluzioni prima prova intermedia del 3 Novembre 2003

Esercizio 1. Tra le seguenti formule proposizionali:

$$\begin{array}{l}
(1)\ (\,(a \wedge \neg b) \rightarrow (a \vee \neg b)\,) \vee (b \rightarrow \neg a) \\
(2)\ \neg b \rightarrow \neg a \\
(3)\ (a \rightarrow b) \rightarrow (\,(b \rightarrow a) \wedge (\neg a \wedge b)\,) \\
(4)\ a \wedge \neg b
\end{array}$$

- individuare le tautologie;
- individuare le coppie di formule equivalenti;
- individuare le coppie di formule che siano l'una la negazione dell'altra.

Soluzione: (1) è una tautologia (ha tutti 1 nella tavola di verità). (3) e (4) sono equivalenti (stessa tavola di verità). Sia (3) che (4) equivalgono alla negazione di (2) (tavole di verità con 0 ed 1 invertiti).

Esercizio 2. Si consideri il seguente enunciato: *"n è il più piccolo numero dell'insieme A"*.

- Determinare quale delle seguenti formule esprime l'enunciato di sopra:

$$\begin{array}{l}
(1)\ n \in A \wedge \forall x(n \leq x \rightarrow x \in A) \\
(2)\ \forall x(x \in A \wedge n \leq x) \\
(3)\ \forall x(x \in A \rightarrow n \leq x) \\
(4)\ n \in A \wedge \forall x(x \in A \rightarrow n \leq x)
\end{array}$$

- Determinare quale delle seguenti formule ne esprime la negazione:

$$\begin{array}{l}
(a)\ n \notin A \wedge \forall x(x < n \rightarrow x \notin A) \\
(b)\ n \notin A \vee \exists x(x < n \wedge x \in A) \\
(c)\ n \notin A \vee \exists x(x < n \rightarrow x \notin A) \\
(d)\ n \notin A \wedge \exists x(x < n \rightarrow x \notin A)
\end{array}$$

Soluzioni: (4), (b).

Esercizio 3. Si consideri la formula $f(x) = x^2 - x$. Dire (giustificando) se tale formula definisce una funzione $f : A \rightarrow A$, e se tale funzione è iniettiva, è suriettiva, è biunivoca, in ciascuno dei seguenti casi:

1. A è l'insieme dei numeri interi positivi pari.
2. A è l'insieme dei numeri interi positivi dispari.
3. A è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 2.

Soluzioni:

Domanda 1: definita, iniettiva, non surgettiva, quindi non biunivoca.

Dimostrazione: La formula definisce una funzione in quanto se x è pari anche x^2 lo è e quindi lo è anche $x^2 - x$ in quanto differenza di due numeri pari. I primi valori della funzione sono $f(2) = 2, f(4) = 12, f(6) = 30, f(8) = 56$. Si intuisce che il valore 4 (ad esempio) non verrà mai preso e che quindi f non è surgettiva. Per dimostrarlo si cerca di risolvere l'equazione $x^2 - x = 4$. Portando il 4 dall'altra parte dell'uguaglianza e applicando la formula risolutiva all'equazione $x^2 - x - 4 = 0$ si ottiene $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$. Nessuno dei due valori della x è intero e quindi non può appartenere all' insieme A. Risulta in questo modo dimostrato che $f\colon A \rightarrow A$ non è surgettiva. Per quanto riguarda l'iniettività si può ragionare come segue. Esaminando i primi valori di f si intuisce che f è crescente, cioè presi due valori in ingresso $a < b$ (con $a, b \in A$) si ha $f(a) < f(b)$. Per dimostrarlo basta riscrivere $x^2 - x$ come $x(x-1)$ e osservare che se $a < b$ abbiamo anche $a - 1 < b - 1$ e pertanto, siccome le disuguaglianze si mantengono moltiplicandole per numeri positivi, si ottiene $f(a) = a(a-1) < a(b-1) < b(b-1) = f(b)$. La f è quindi crescente, e quindi in particolare non può assumere due volte lo stesso valore, il che vuol dire che f è iniettiva.

Domanda 2. non definita.

Dimostrazione: f non è definita in quanto prendendo $x = 3$ si ottiene per $x^2 - x$ un valore pari che quindi non appartiene ad A. Infatti $3^2 - 3 = 6 \notin A$.

Domanda 3. definita, surgettiva, iniettiva, quindi biunivoca. .

Idea geometrica: Il grafico di $x^2 - x$ è una parabola. Una parabola definisce una funzione da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ che non è nè iniettiva nè surgettiva. Tuttavia nel nostro caso stiamo considerando solo la porzione della parabola che parte dal punto $(2,2)$ e cresce verso l'infinito man mano che l'ascissa x cresce. Ciò implica che f è iniettiva e surgettiva nel dominio considerato, ovvero per ogni $y \geq 2$ esiste un ed un solo valore $x \geq 2$ tale che il punto (x, y) giace sulla porzione di parabola considerata.

Dimostrazione formale: Se $x \geq 2$, allora $x^2 - x = x(x-1) \geq 2 \cdot 1 = 2$. Quindi f è definita. Per la surgettività basta osservare che se $y \geq 2$ allora l'equazione $x^2 - x = y$ (con x incognita e y dato) ha soluzione (in $\mathbb{R}$) $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$ (dove il numero sotto il segno di radice è positivo e pertanto la radice è ben definita). Delle due soluzioni così ottenute, almeno una (quella con il segno $+$ davanti alla radice) è maggiore o uguale a 2 (essendo $\frac{1+\sqrt{1+4y}}{2} \geq \frac{1+\sqrt{1+4 \cdot 2}}{2} \geq 2$). Quindi f è surgettiva. Infine osserviamo che l'altra soluzione, quella con il segno $-$ davanti alla radice, non è mai maggiore o uguale a 2 (essendo minore di $1/2$). Quindi per ogni $y \in A$, l'equazione $x^2 - x = y$ ha una ed una sola soluzione x nell'insieme A. Ciò equivale a dire che f è iniettiva.

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che se $n \geq 5$ allora $3^n > 7n^2$.

Soluzione: Caso base: svolgendo i calcoli si vede che $3^5 > 7 \cdot 5^2$, quindi il caso base è verificato.

Passo induttivo: supponiamo per ipotesi induttiva che $3^n > 7n^2$. Dobbiamo verificare che

$$3^{n+1} > 7(n+1)^2. \tag{1}$$

Analizziamo i due termini di questa disuguaglianza. Per quanto riguarda il primo termine, usando l'ipotesi induttiva otteniamo $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot 7n^2 = 21n^2$. D'altra parte svolgendo i calcoli nel secondo termine otteniamo $7(n+1)^2 = 7n^2 + 14n + 7$. Per ottenere la (1) basta quindi dimostrare che $21n^2 \geq 7n^2 + 14n + 7$ e cioè (cancellando $7n^2$ da entrambi i lati e dividendo per 7)

$$2n^2 \geq 2n + 1 \tag{2}$$

La (2) (che implica la (1) componendo le disuguaglianze) è di facile verifica. Infatti: $2n^2 = 2n \cdot n \geq 2n \cdot 2 = 2n + 2n \geq 2n + 1$, dove la prima disuguaglianza dipende dal fatto che $n \geq 2$ (essendo in effetti $n \geq 5$).

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica
Prima prova intermedia del 3 Novembre 2003

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Esercizio 1. Tra le seguenti formule proposizionali:

$$
\begin{array}{l}
(1)\ (a \to b) \to (\,(\neg a \wedge b) \wedge (b \to a)\,) \\
(2)\ \neg b \to \neg a \\
(3)\ \neg b \wedge a \\
(4)\ (\,(a \wedge \neg b) \to (a \vee \neg b)\,) \vee (a \to \neg b)
\end{array}
$$

- individuare le tautologie;
- individuare le coppie di formule equivalenti;
- individuare le coppie di formule che siano l'una la negazione dell'altra.

Esercizio 2.
Si consideri il seguente enunciato: *"n è il più grande numero dell'insieme B"*.

- Determinare quale delle seguenti formule esprime l'enunciato di sopra:

$$
\begin{array}{l}
(1)\ \forall x(x \in B \to x \leq n) \\
(2)\ \forall x(x \leq n \to x \in B) \wedge (n \in B) \\
(3)\ \forall x(x \in B \to x \leq n) \wedge (n \in B) \\
(4)\ \forall x(x \leq n \wedge x \in B)
\end{array}
$$

- Determinare quale delle seguenti formule ne esprime la negazione:

$$
\begin{array}{l}
(a)\ \exists x(n < x \to x \notin B) \vee n \notin B \\
(b)\ \forall x(n < x \to x \notin B) \wedge n \notin B \\
(c)\ \exists x(n < x \to x \notin B) \wedge n \notin B \\
(d)\ \exists x(n < x \wedge x \in B) \vee n \notin B
\end{array}
$$

Esercizio 3. Si consideri la formula $g(z) = 2z^2 + 2z$. Dire (giustificando) se tale formula definisce una funzione $g : A \to A$, e se tale funzione è iniettiva, è suriettiva, è biunivoca, in ciascuno dei seguenti casi:

1. A è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 1.
2. A è l'insieme dei numeri interi positivi pari.
3. A è l'insieme dei numeri interi positivi dispari.

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che se $n \geq 4$ allora $2 \cdot 3^n > 9n^2$.

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica
Prima prova intermedia del 3 Novembre 2003

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Esercizio 1. Tra le seguenti formule proposizionali:

$$\begin{array}{l}
(1)\ \neg a \to \neg b \\
(2)\ (\,(\neg a \wedge b) \to (b \vee \neg a)\,) \vee (a \to \neg b) \\
(3)\ \neg a \wedge b \\
(4)\ (b \to a) \to (\,(a \to b) \wedge (a \wedge \neg b)\,)
\end{array}$$

- individuare le tautologie;
- individuare le coppie di formule equivalenti;
- individuare le coppie di formule che siano l'una la negazione dell'altra.

Esercizio 2.
Si consideri il seguente enunciato: *"k è il più piccolo numero dell'insieme B"*.

- Determinare quale delle seguenti formule esprime l'enunciato di sopra:

$$\begin{array}{l}
(1)\ \forall x(x \in B \to k \leq x) \wedge k \in B \\
(2)\ \forall x(k \leq x \wedge x \in B) \\
(3)\ \forall x(k \leq x \to x \in B) \wedge k \in B \\
(4)\ \forall x(x \in B \to k \leq x)
\end{array}$$

- Determinare quale delle seguenti formule ne esprime la negazione:

$$\begin{array}{l}
(a)\ \exists x(x < k \to x \notin B) \vee k \notin B \\
(b)\ \forall x(x < k \to x \notin B) \wedge k \notin B \\
(c)\ \exists x(x < k \to x \notin B) \wedge k \notin B \\
(d)\ \exists x(x < k \wedge x \in B) \vee k \notin B
\end{array}$$

Esercizio 3. Si consideri la formula $g(x) = x^2 + 2x$. Dire (giustificando) se tale formula definisce una funzione $g : B \to B$, e se tale funzione è iniettiva, è suriettiva, è biunivoca, in ciascuno dei seguenti casi:

1. B è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 1.
2. B è l'insieme dei numeri interi positivi pari.
3. B è l'insieme dei numeri interi positivi dispari.

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che se $n \geq 8$ allora $2^n > 3n^2$.

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica
Prima prova intermedia del 3 Novembre 2003

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Esercizio 1. Tra le seguenti formule proposizionali:

$$
\begin{array}{l}
(1)\ (b \to a) \to (\,(a \to b) \wedge (a \wedge \neg b)\,) \\
(2)\ (\,(\neg a \wedge b) \to (b \vee \neg a)\,) \vee (b \to \neg a) \\
(3)\ \neg a \to \neg b \\
(4)\ b \wedge \neg a
\end{array}
$$

- individuare le tautologie;
- individuare le coppie di formule equivalenti;
- individuare le coppie di formule che siano l'una la negazione dell'altra.

Esercizio 2.
Si consideri il seguente enunciato: *"k è il più grande numero dell'insieme A"*.

- Determinare quale delle seguenti formule esprime l'enunciato di sopra:

$$
\begin{array}{l}
(1)\ \forall x(x \in A \wedge x \leq k) \\
(2)\ \forall x(x \in A \to x \leq k) \\
(3)\ k \in A \wedge \forall x(x \in A \to x \leq k) \\
(4)\ k \in A \wedge \forall x(x \leq k \to x \in A)
\end{array}
$$

- Determinare quale delle seguenti formule ne esprime la negazione:

$$
\begin{array}{l}
(a)\ k \notin A \wedge \forall x(k < x \to x \notin A) \\
(b)\ k \notin A \vee \exists x(k < x \wedge x \in A) \\
(c)\ k \notin A \vee \exists x(k < x \to x \notin A) \\
(d)\ k \notin A \wedge \exists x(k < x \to x \notin A)
\end{array}
$$

Esercizio 3. Si consideri la formula $f(z) = z^2 - 2z$. Dire (giustificando) se tale formula definisce una funzione $f : B \to B$, e se tale funzione è iniettiva, è suriettiva, è biunivoca, in ciascuno dei seguenti casi:

1. B è l'insieme dei numeri interi positivi pari.
2. B è l'insieme dei numeri interi positivi dispari.
3. B è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 3.

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che se $n \geq 6$ allora $3 \cdot 2^n > 4n^2$.