Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Lista di esercizi per prepararsi al compitino

Esercizio 1. Si esprima in linguaggio naturale il significato della seguente formula

$$\forall x \exists y (x < y) \rightarrow \neg \exists y \forall x (x \leq y).$$

Esercizio 2. Usando le notazioni logiche, le costanti numeriche $0, 1, 2, \ldots$, e le operazioni di somma e prodotto, si esprima l'enunciato

"Ogni numero intero è pari o dispari".

Esercizio 3. Dire se le seguenti inclusioni valgono per tutti gli insiemi A, B, C, D, motivando la risposta.

1. $B \cap D \subseteq (C \cap B) \cup (A \cap D) \cup (A \cap C)$;
2. $A \cup C \cup D \supseteq (B - A) \cap C$;
3. $(B - D) - A \supseteq (B - A) - (C \cup D)$.

Esercizio 4. Dati tre sottoinsiemi A, B, C di $\mathbf{N}$, usando le consuete operazioni insiemistiche (unione, intersezione, differenza e complemento) scrivere un'espressione che denota:

1. l'insieme dei numeri naturali che appartengono ad uno ed uno solo degli insiemi A o B.
2. l'insieme dei numeri naturali che appartengono ad uno ed uno solo degli insiemi A o B o C.

Esercizio 5. Si considerino le funzioni:

- $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$ definita per ogni $z \in \mathbf{Z}$ da $f(z) = \frac{3z+1}{2z+1}$
- $g : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ definita per ogni $q \in \mathbf{Q}$ da $g(q) = q^2 - \frac{1}{2}$.

1. Per ciascuna delle due funzioni, f e g, dire se è iniettiva, surgettiva o biunivoca.
2. Dire se si possono definire le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ ed in caso affermativo dire se sono iniettive, surgettive o biunivoche.

Giustificare le risposte.

Esercizio 6. Siano A, B e C tre insiemi. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa, giustificando la risposta.

1. Se $B \cap A \subseteq C$ allora $B \subseteq C$ e $A \subseteq C$;
2. Se $B \setminus A \subseteq C$ allora $B \subseteq A \cup C$;
3. Se $B \subseteq A \cup C$ e $B \cap A = \emptyset$ allora $B \subseteq C \setminus A$;
4. Se $B \subseteq A \cup C$ allora $B \cap A \neq \emptyset$.

Esercizio 7.

- Stabilire se la seguente formula è o no una tautologia: $[A \to (B \vee C) \wedge (\neg B \wedge \neg C)] \to \neg A$.
- Stabilire se Q è conseguenza logica di $(P \to Q) \wedge (\neg P \to Q)$.

Esercizio 8. Si considerino le seguenti 5 formule ed i seguenti 5 enunciati.

1. $\forall x \in \mathbf{R}\ (\mathbf{x > 0 \to f(x) \neq 0})$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}\ (\mathbf{f(x) \leq 0 \to x = 0})$.
3. $\exists x \in \mathbf{R}(\mathbf{f(x) < 0 \wedge x < 0})$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}\ (\mathbf{f(x) > 0 \to x \neq 0})$.
5. $\exists x \in \mathbf{R}\ (\mathbf{f(x) = 0 \wedge x > 0})$.

a. La funzione f assume un valore non positivo sul numero 0.
b. La funzione f si annulla su qualche numero positivo.
c. Su qualche numero diverso da zero, la funzione f assume valori non positivi.
d. La funzione f non si annulla mai su numeri reali positivi.
e. C'è un numero non negativo la cui immagine mediante f è un numero positivo.

- Individuare, se ve ne sono, le coppie costituite da una formula ed un enunciato aventi lo stesso significato (per ogni coppia specificare il numero della formula e la lettera dell'enunciato corrispondente).
- Individuare, se ve ne sono, le coppie di formule che sono una equivalente alla negazione dell'altra (per ogni coppia di formule specificare i due numeri corrispondenti).

Esercizio 9. Si considerino le seguenti funzioni:

1. $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita da $f(x) = 3x + 5$ per ogni $x \in \mathbf{Z}$;
2. $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $g(x) = 3x + 5$ per ogni $x \in \mathbf{R}$;
3. $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $h(x) = x^2 + 7$ per ogni $x \in \mathbf{R}$;
4. $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è la funzione composizione di g con h, cioè $\varphi = h \circ g$.

- Stabilire se le funzioni f, g, h e φ siano iniettive, surgettive o biunivoche e, nei casi possibili, determinare l'inversa della funzione;
- Determinare l'immagine di h, cioè l'insieme $\{y \in \mathbf{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbf{R}\ \mathbf{h(x) = y}\}$;
- Determinare le controimmagini di $y = 8$ mediante φ, cioè l'insieme $\{x \in \mathbf{R} \mid \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{8}\}$.

Esercizio 10. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, vale l'uguaglianza

$$3 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 + ... + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^n = \frac{5 \cdot (5^n - 2^n)}{2^n}$$

Esercizio 11. Si considerino le seguenti funzioni:

- $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita per ogni $z \in \mathbf{Z}$ da $f(z) = 1 - 3z$;
- $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ definita per ogni $z \in \mathbf{Z}$ da $g(z) = \frac{5}{z^2+1}$.

1. Dire se le due funzioni sono iniettive, surgettive, biunivoche. Giustificare le risposte.
2. Determinare tutti i numeri interi che appartengono all'immagine di g

3. Scrivere la funzione $g \circ f$.

Esercizio 12. Determinare (se ve ne sono) le coppie di enunciati equivalenti:

1. $\exists x \forall y(y = 0 \land x < y)$
2. $\exists x \forall y(y \neq 0 \to x < y)$
3. $\exists x \forall y(y \neq 0 \lor x < y)$
4. $\forall x \exists y(y = 0 \lor y < x)$
5. $\exists x \forall y(x < y \lor y = 0)$

Esercizio 13. Usando le notazioni logiche e le operazioni aritmetiche di somma, prodotto ed elevamento a potenza, si trovi una espressione della forma $\{x \mid P(x)\}$ che denoti l'insieme dei numeri naturali maggiori di uno che sono potenza di un numero primo (si ricordi che una potenza di un primo è un numero della forma p^n, con p primo).

Esercizio 14. Elencare tutti i numeri naturali minori di 20 che appartengono all'insieme

$$\{x \mid x > 4 \to \forall y[(\exists k(yk = x) \land y \text{ è primo }) \to y \leq 5]\}.$$

Esercizio 15. Sia $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ la funzione definita nel modo seguente.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{n}{5} & \text{se } n \text{ non è pari ed è multiplo di 5} \\ n & \text{se } n \text{ non è pari e non è multiplo di 5} \end{cases}$$

Stabilire se f è iniettiva, surgettiva, biunivoca.

Esercizio 16. Siano A, B e C tre insiemi assegnati. Usando esclusivamente i simboli di unione $\cup$, intersezione $\cap$, differenza insiemistica $\setminus$, insieme vuoto $\emptyset$, inclusione $\subseteq$, uguaglianza $=$, non uguaglianza $\neq$, e le parentesi, si formalizzino i seguenti enunciati: (Attenzione: *non* si può usare il simbolo $\in$ di appartenenza).

1. Ogni elemento di C appartiene a B o ad A.
2. Non vi sono elementi di B che appartengono ad A ma non a C.

Esercizio 17. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbf{N}$ che $n^n \geq n!$.

Esercizio 18. Si formalizzi nel linguaggio dei numeri naturali con somma, prodotto, ordine ($<$), e predicato di divisibilità ($x \mid y$), e il predicato "x è primo", il seguente enunciato:

Non tutti i divisori primi di n sono minori di 10.

Esercizio 19. Si determinino tutte le equivalenze che sussistono tra i seguenti enunciati.

1. $X = \{x \mid P(x)\} \cap \{y \mid Q(y)\}$.
2. $X = \{x \mid P(x)\} \cap \{x \mid Q(x)\}$.
3. $X = \{x \mid P(x) \land Q(x)\}$.

4. $X = \{(x,y) \mid P(x) \wedge Q(y)\}$.
5. $\{x \mid P(x)\} \subseteq \{x \mid Q(x)\}$.
6. $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$.
7. $\forall x(P(x) \to Q(x))$.
8. $\forall xy(P(x) \to Q(y))$.
9. $\forall x(Q(x) \to P(x))$.

Esercizio 20. Determinare nella seguente lista se vi siano due espressioni che denotano lo stesso insieme, qualunque sia la scelta degli insiemi A, B, C. La risposta **deve** essere giustificata.

1. $(A \times C) \cup (B \times C)$
2. $(A \cup C) \times (B \cup C)$
3. $(A \cup B) \times C$
4. $(A \times B) \cup C$

Esercizio 21. Assumendo che il dominio delle variabili sia **Z**, si considerino i seguenti insiemi e si stabiliscano le mutue relazioni di inclusione e/o di uguaglianza.

1. $A = \{x \mid \exists k(x = 6k)\}$
2. $B = \{x \mid \exists k(x = 10k)\}$
3. $C = \{x \mid \exists k(x = 30k)\}$
4. $A \cap B$.

Esercizio 22. Si determini quali delle seguenti formule sono equivalenti:
1. $\neg(p \wedge (q \vee r))$
2. $p \wedge q \wedge \neg r$
3. $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

Esercizio 23. Si stabilisca quali delle seguenti formule sono vere nel dominio **N** degli interi non negativi. Si svolga poi lo stesso esercizio per i domini **Z** ed **R**.
1) $\exists x \forall y(x + y = y)$,
2) $\forall y \exists x(x + y = 0)$,
3) $\forall x \forall y \exists z(x < z \wedge z < y)$,
4) $\forall x \exists y(x < y \wedge \neg \exists z(x < z \wedge z < y))$.

Esercizio 24. Dire quali delle seguenti sono vere per ogni insieme A, B e C:

- $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
- $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$.
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$.
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

- $(A - B) - C = (A - C) - B$

Esercizio 25. Si dimostri che per ogni intero $n \geq 1$ si ha $3^n > n^2 + n$.

Esercizio 26. Si stabilisca quali delle seguenti funzioni sono iniettive, quali sono surgettive, e quali biunivoche. Nel caso di funzioni biunivoche si calcoli l'inversa.

1. $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita da $f(x) = 4x + 1$.
2. $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita da $g(x) = x - 3$.
3. $f \circ g$, con f, g come sopra.
4. $h : \mathbf{R} \to \{\mathbf{x} \in \mathbf{R} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ definita da $h(x) = (x - 1)^2$