DATA: 25/02/16

PRODOTTO DI MATRICI

MATRICI $m \cdot k$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}$$
m righe
k colonne

$Mat_{m \cdot k}(\mathbb{R})$ ← DI REALI

IL PRODOTTO DI UNA $MAT_{m \cdot k} \times Mat_{k \cdot m} = M_{m \cdot m}$

ES: $\underbrace{A}_{m \cdot k} \cdot \underbrace{B}_{k \cdot m} = \underbrace{C}_{m \cdot m} \longrightarrow A = (a_{ij})$ $\quad B = (b_{jl}) \quad C(c_{il})$

i = RIGA $\leq m$ $\quad$ j = RIGA $\leq k$ $\quad$ $i \leq m$ = RIGA

$j \leq k$ $\quad$ $l \leq m$ = colonna $\quad$ $l \leq m$ COLONNA

FORMULA: C_{il} = (i-esima riga di A) $\times$ (l-esima colonna di B)

$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}) \times (b_{1l}, b_{2l}, \ldots, b_{kl})$ ← IN VERTICALE

e dove uguale a $= a_{i1}b_{1l} + a_{i2}b_{2l} + \ldots + a_{ik}b_{kl}$.

CON LA SOMMATORIA: $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \cdot b_{jl} = C_{il}$

ES: $Mat_{2\times3} \times Mat_{3\times2} = Mat_{2\times2}$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{C}$$

C_{11} ← $1\cdot2+0\cdot1+1\cdot0$ $\quad$ C_{12}

$C_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 1$

$C_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} b_{31} =$

$C_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} + b_{32} =$

SISTEMI LINEARI

SAR

$* \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ← $Mat_{2 \cdot 3}$

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y - z \\ 5x - 2y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ (A: $MAT_{2\cdot3}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $MAT_{3\cdot1}$)

IL SISTEMA * LO POSSO RISCRIVERE: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

COME TROVIAMO x, y, z?

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 3 \end{cases} \quad \Leftarrow \left(5x + \frac{15}{2}y - \frac{5}{2}z = 5\right)$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 0 - \frac{19}{2}y + \frac{9}{2}z = -2 \Leftarrow R_2 - \frac{5}{2}R_1 \end{cases}$$

IN MATRICI

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{19}{2} & +\frac{9}{2} & -2 \end{array}\right) \Leftarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$\uparrow$ SCALINO

O = PIVOT, OVVERO I NUMERI AGLI ANGOLI

VARIABILI LIBERE: SONO LE VARIABILI ~~DIVERSE, DAI PIVOT~~ CHE CORRISPONDO ALLE COLONNE DOVE NON C'È UN PIVOT.

QUINDI IN QUESTO CASO: z È LIBERA $= \frac{9}{2}$

PROCEDIAMO: PRENDIAMO LA SECONDA RIGA E TROVIAMO LA y (IL PIVOT).

$$-\frac{19}{2}y = -2 - \frac{9}{2}z \rightarrow \frac{19}{2}y = 2 - \frac{9}{2}z \rightarrow 19y = 4 + 9z \rightarrow y = \frac{4}{19} + \frac{9}{19}z$$

SOSTITUIAMO NELLA PRIMA RIGA: $2x + 3y - z = 2 \rightarrow 2x = 2 - 3y + z \rightarrow x = 1 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z$

$$\rightarrow x = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{4}{19} + \frac{9}{19}z\right) + \frac{1}{2}z \rightarrow 1 - \frac{6}{19} - \frac{4}{19}z \rightarrow x = \frac{13}{19} - \frac{4}{19}z$$

$$-\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{19} = -\frac{27}{38}$$

QUINDI: $y = \frac{4}{19} + \frac{9}{19}z$ e $x = \frac{13}{19} - \frac{4}{19}z$ CON z LIBERA!

RISCRIVIAMOLA SOTTOFORMA DI VETTORE:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{19} - \frac{4}{19}z \\ \frac{4}{19} + \frac{9}{19}z \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/19 \\ 4/19 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -4/19 \\ 9/19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

k ↳ È LA "z"

CONCLUSIONE

LE $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ CHE RISOLVONO IL SISTEMA * SONO DELLA FORMA $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{9} - \frac{4}{19}k \\ \frac{4}{19} + \frac{9}{19}k \\ k \end{pmatrix}$

GRADO DI LIBERTÀ = QUANTE VARIABILI LIBERA CI SONO NEL ~~[illegible]~~ VETTORE

QUINDI = ABBIAMO 1 GRADO DI LIBERTÀ