TEORIA DAL LIBRO

SPAZIO VETTORIALE:

UN INSIEME V SI DICE UNO SPAZIO VETTORIALE SUL VETTORE K SE SONO DEFINITE DUE FUNZIONI A VALORI IN V:

① UNA FUNZIONE $V \times V$ IN V (ADDIZIONE VETTORIALE), TALE CHE $\forall u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$

② UNA FUNZIONE TRA UN ELEMENTO K ED UN ELEMENTO DI V (MOLTIPLICAZIONE SCALARE) TALE CHE $\forall \lambda \in K \wedge \forall v \in V \xRightarrow{\text{ASSOCIA}} \lambda \cdot v$

E SE TALI FUNZIONI RISPETTANO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELL'ADDIZIONE = $\forall u, v, w \in V$ VALE $(u+v)+w = u+(v+w)$

2- PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELL'ADDIZIONE = $\forall v, w \in V$ VALE $v+w = w+v$

3- ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO DELL'ADDIZIONE = $\forall v \in V$ $\exists \emptyset \in V$ TALE CHE $v+0=v$

4- ESISTENZA DELL'OPPOSTO PER L'ADDIZIONE = $\forall v \in V$ $\exists w \in V$ TALE CHE $v+w=0$

5- PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELLA ~~ADDIZIONE~~ MOLTIPLICAZIONE = $\forall \lambda, \mu \in K \wedge \forall v \in V$ VALE CHE *

$$* \begin{cases} \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w \\ (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v \end{cases}$$

6- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE = $\forall \lambda, \mu \in K \wedge \forall v \in V$ VALE CHE $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

7- PROPRIETÀ DELL'ESISTENZA DELL'INVARIANTE MOLTIPLICATIVO = $\forall v \in V$ VALE $1 \cdot v = v$

OSS: LE PRIME 4 SONO IL GRUPPO COMMUTATIVO RISPETTO ALLA SOMMA

OSS: SE V È UNO SPAZIO VETTORIALE SU UN CAMPO K CHIAMEREMO <u>VETTORI</u> GLI ELEMENTI DI V E <u>SCALARI</u> GLI ELEMENTI DEL CAMPO K.

OSS: OGNI CAMPO K È UNO SPAZIO VETTORIALE SU K STESSO. IN PARTICOLARE DUNQUE $\mathbb{R}$ SU $\mathbb{R}$ e/o $\mathbb{Q}$ SU $\mathbb{Q}$

SOMMA TRA VETTORI

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

PRODOTTO TRA VETTORI

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

TEORIA DAL LIBRO

Sottospazio Vettoriale

Un sottospazio vettoriale W di V è un sottoinsieme $W \subseteq V$ che è uno spazio vettoriale su K.

OSS: V è sottospazio vettoriale di V e anche $\{\emptyset\}$, quindi sottospazio vettoriale sarà proprio se è $\neq$ da V e $\{\emptyset\}$

Def: Dato V spazio vettoriale su K e W sottoinsieme di V, W è sottospazio vettoriale se e solo se:

1- Il vettore $\emptyset$ appartiene a W (contengono l'elemento neutro dell'add vettoriale)
2- $\forall v, w \in V$ vale $v + v \in W$ (chiuso rispetto alla somma vettoriale)
3- $\forall \lambda \in K \wedge \forall v \in W$ vale $\lambda \cdot v \in W$ (chiuso rispetto al prodotto scalare)

OSS: Una curva casuale ha probabilmente non soddisfano il punto $\emptyset$ per esempio, una circonferenza non contiene lo $\emptyset$ o comunque non soddisfa le altre 2.
In particolare però, le rette passanti per l'origine soddisfano ①, ② e ③ e sono sottospazi vettoriali. Ancora più in particolare, le rette passanti per l'origine sono tutti e i soli sottospazi vettoriali in $\mathbb{R}^2$.

Unione ed Intersezione

$U \cap W$ = è sottospazio vettoriale di V (è il più grande sottospazio vettoriale di V contenuto sia in U, sia in W).

$U \cup W$ = è sottospazio vettoriale di V (a volte!) (in generale no)

OSS= Quindi qual è il più piccolo sottospazio vettoriale? Definiamo:
$U + W = \{ u + w \mid u \in V, w \in W \}$. ← Esso è il più piccolo sottospazio vettoriale, e lo è sempre!