Es:
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

INDIPENDENTI

OSS: MOSSA DI COLONNA NON CAMBIA LO SPAN

MOSSA DI RIGA NON CAMBIA ~~LE DIPENDENZE~~ SOLUZIONI

ESERCIZIO: ~~Data~~ 10/03/16

$A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$

$L_A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

$$L_A : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \end{pmatrix} *$$

$$L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$* \; x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

TEOREMA

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(L_A) \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathrm{span} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

$$SPAN(v_1, v_2, v_3) = SPAN(\underbrace{v_1 - 3v_2}_{w_1}, v_2, v_3)$$

OSS: NEL CALCOLARE LO SPAN POSSO:

1) SOSTITUIRE UN VETTORE v_i CON $v_i + a v_j$

2) SOSTITUIRE UN VETTORE v_i CON $a v_i$

3) SCAMBIARE DUE VETTORI

LO SPAN NON CAMBIA.

$v_1 = w_1 + 3w_2$

ESEMPIO:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \qquad L_A: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

ES:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

APPLICAZIONE LINEARE L_A ASSOCIATA AD A

$L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \qquad L_A(v) = Av$

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$

→ TROVARE BASE DI $Ker(L_A)$ E UNA BASE DI $Im(L_A)$

$Ker(L_A) = \{ v \mid Av = \bar{0} \} = Span(?)$

Def = PRESO V SPAZIO VETTORIALE (PER ESEMPIO $Ker(L_A)$) E $v_1, \dots, v_m \in V$ ALLORA $(v_1, \dots, v_m)$ È UNA BASE DI V ⇔ BASE

1) $V = span(v_1, \dots, v_m)$,

2) $v_1, \dots, v_m$ INDIPENDENTI CIOÈ $c_1 v_1 + \dots c_m v_m = \bar{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0$

RISOLVIAMO L'ESERCIZIO: $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow[\text{DI RIGA}]{\text{MOSSE}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & & x_3 & x_4 \end{array}$$

x_4 LIBERA

x_3 LIBERA

SOLUZIONI SPECIALI

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TUTTE LE SOLUZIONI = SPAN $\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{BASE DI } Ker(L_A)}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{DI COLONNE}]{\text{MOSSE}} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

INDIPENDENTI

OBS: ESTENDERE LA BASE DI $Ker(L_A)$ A UNA BASE DI $\mathbb{R}^4$

$Ker(L_A) \subset \mathbb{R}^4$

BASE DI $\mathbb{R}^4$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\2 & 2 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\1 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix} = \text{SPAN}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$\text{SPAN}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \text{Span}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2 = \text{Span}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

$C_2 \to C_2 + \frac{1}{2}C_1$

A MATRICE CON K COLONNE $\neq 0$ => DI ALTEZZE DIVERSE, QUEI K VETTORI COLONNA SONO INDIPENDENTI

OBS: $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\1 & 4 & 0 & 0\\2 & 2 & 0 & 0\\5 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$ $3\bar{0} = \bar{0}$ $\{\bar{0}\}$ È DIPENDENTE

INDIPENDENTI $\bar{0}$

$C_1\begin{pmatrix}3\\1\\2\\5\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\4\\2\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3C_1\\4C_2\\?\\3C_3\end{pmatrix}$ $\to C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$

IN $V = \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (v_1, v_2, v_3)

$v_1 = v_2 + v_3$

$-v_1 + v_2 + v_3 = \bar{0}$ DIPENDENTI

ELIMINO QUALCHE VETTORE SUPERFLUO ED ESTRAGGO UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$

BASE DI $\mathbb{R}^2$ ESTRATTE

$< \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} >$ ← BASE B_1 BASE $B_2 = < \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} >$

SPAN $B_2 = \mathbb{R}^2$? $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

QUINDI $\begin{cases} x = b \\ y = a - b \end{cases}$ ⇐ $b + y = a$ QUINDI $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (a-b)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ALLORA

$\mathbb{R}^2 = \underbrace{\text{SPAN}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)}_{*\text{BASE}}$

* BASE: È UNA BASE PERCHÉ HANNO ALTEZZE DIVERSE

SONO INDIPENDENTI?

$c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ QUINDI $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$

ALLORA INDIPENDENTI

TEOREMA PER VEDERE SE I VETTORI SONO INDIPENDENTI.

MATRICE A (MATRICE DI VETTORE COLONNA) $= (v_1 | v_2 | \dots | v_m)$ SONO INDIPENDENTI

SSE $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m = \bar{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0$

ALLORA $A\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_m\end{pmatrix} = (v_1 | \dots | v_m)\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0$

MATRICE A APPLICATA $c_1, \dots, c_m$.

Def: LE COLONNE DI A SONO INDIPENDENTI SSE L'UNICA SOLUZIONE DEL

SISTEMA $A\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_m\end{pmatrix} = \bar{0}$ È $\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_m\end{pmatrix} = \bar{0}$

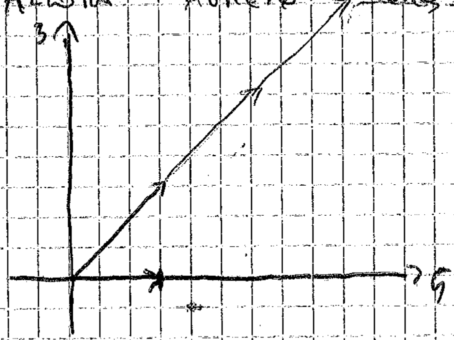
COORDINATE DI UN VETTORE RISPETTO AD UNA BASE

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad V = \mathbb{R}^2$

$B_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

PRENDIAMO IL $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ E LO VOGLIO ESPRIMERE COME COMBINAZIONE LINEARE DI B_2 SCRIVEREMO CHE $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ALLORA AVREMO CHE LE COORDINATE DI $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ RISPETTO A B_2 SONO $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



IMPORTANTE: SE $v_1, \dots, v_n$ BASE DI V E $w \in V = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$ ESISTONO $c_1, \dots, c_n$ $\boxed{\text{UNICI}}$

$w = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

$w = d_1 v_1 + \dots + d_n v_n$

DIM: $\bar{0} = w - w = c_1 v_1 + \dots + c_1 v_n - d_1 v_1 + \dots + d_n v_n =$

$(c_1 - d_1) v_1 + \dots + (c_n - d_n) v_n = \bar{0}$ $\qquad v_1, \dots, v_n$ INDIPENDENTI $\Rightarrow$

$c_1 - d_1 = 0 \dots c_n - d_n = 0$

$c_1 = d_1 \dots c_n = d_n$

$V = R[x]^{\leq 4}$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

$R[x]^{=4}$ $(3x^3 + x^4) + (2x^3 - x^4) = 5x^3$

NON È SPAZIO VETTORIALE

$p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leq 4}$ $p(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$

LA BASE È $<1, x, x^2, x^3>$ di $R[x]^{\leq 3}$

ESERCIZIO: $W \subset \mathbb{R}[x]^{\leq 4}$ $p(x) \in W \Leftrightarrow p(1) = 0$

ESERCIZIO DISPENSE PAG. 44 (ESERCIZI DELLO STUDENTE DA CONTROLLARE)

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y - z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

1) $x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ COMBINAZIONE LINEARE

2) $\mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \mathbb{R}^2$ MATRICE ASSOCIATA RISPETTO AD UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$

$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 - 0 \\ 1 - 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2 - 0 \\ 0 + 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Span}(\mathcal{U}) = x_0 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_0 + 2z_0 \\ -\frac{1}{3}x_0 - z_0 \\ x_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Span}(\mathcal{W}) = x_0 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + z_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_0 + z_0 \\ 0 \\ x_0 - z_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{4 \cdot 1}{\dim(S+T)} = \underset{4\cdot 1}{\dim(S)} + \underset{4 \cdot 1}{\dim(T)}$$

$$(2,\ 1,\ 2)$$

DATA 15/03/16

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \qquad k\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{k} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}\right. \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{k \times n} \quad \boxed{n \cdot 1} = \boxed{k \cdot 1}$$

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

Def: V, W e $f: V \to W$, f si dice APPLICAZIONE LINEARE se

1) $f(0_V) = 0_W$

2) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

3) $f(cv) = c\, f(v)$

ESE: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to x^2$ $\quad$ lineari?

SVOLGIMENTO $\quad f(3+5) \neq f(3) + f(5)$

$$\Downarrow$$

$$(3+5)^2 \neq 3^2 + 5^2$$

ES: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to 5x$

SVOLGIMENTO: $\quad f(a+b) = 5(a+b)$

$$f(a) + f(b) = 5a + 5b$$

ES: $f(4x) = 5(4x)$

$$\Downarrow$$

$$4f(x) = 4(5x)$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = 5x + 7y$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x + 7y \in \mathbb{R}$

SVOLGIMENTO:

$$f\left[a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right] =$$

$$= f\left[\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bx' \\ by' \end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix} ax + bx' \\ ay + by' \end{pmatrix}\right] = 5(ax + bx') + 7(ay + by')$$

$$//$$

$$= a\, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b\, f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = a(5x + 7y) + b(5x' + 7y')$$

TEO: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineare $\iff$ esiste una matrice $(k \times n)$ A

$$f = L_A$$

$[5, 7]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Sia A matrice $k \cdot n$

$L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

CONTROLLARE CHE È LINEARE:

$$L_A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$L_A(v_1+v_2) = L_A v_1 + L_A v_2$ $\quad L_A(cv) = c L_A(v)$ $\quad A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i;\ j \leq m$

$= L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ $\qquad b_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m$

$\vdots$

$b_k = a_{k1}x_1 + \dots + a_{km}x_m$

$L_A \left[s \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \right] = s \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ $\qquad L_A \left[\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_m'' \end{pmatrix} \right] = L_A \begin{pmatrix} x_1' + x_1'' \\ \vdots \\ x_m' + x_m'' \end{pmatrix}$

$= L_A \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} + L_A \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_m'' \end{pmatrix}$

OSS: LE MATRICE A DEFINISCONO FUNZIONI LINEARI L_A. È VERO ANCHE IL VERSO.

ES: SIA $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ L'INSIEME DEI POLINOMI DI GRADO ≤ 3. È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$. BASE DI $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$? $\quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ $\quad$ COEFFICIENTI: a_0, a_1, a_2, a_3

COMBINAZIONE LINEARE:

$< 1, x, x^2, x^3 >$

$F: V \to V'$ $\qquad F: \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$

$F(p(x)) = p'(x)$

$F(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$

$D x^n = n x^{n+1}$ $\qquad D(p_1(x) + p_2(x)) =$

$D(s\,p(x)) = s\,D(p(x))$

$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$

$c \qquad\qquad c$

LINEARE

OSS: SU SPAZI DI DIMENSIONI FINITA, TUTTE LE APPLICAZIONI LINEARI P

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \ni 5x + 7x^3 & \xrightarrow{D} & \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \\ \downarrow \qquad \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$5x + 7x^3 = 5\ell_2 + 7\ell_4 = 0\ell_1 + 5\ell_2 + 0\ell_3 + 7\ell_4$

$A \in M_{3 \cdot 4}(\mathbb{R})$

TROVARE A

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}[x]^{\leq 3} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\text{COORDINATE} = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle"'] & \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \arrow[d, "\langle 1, x, x^2 \rangle = \text{COORDINATE}"] \\
\mathbb{R}^4 \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

$$L_A\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_2 \\ 3c_3 \end{pmatrix}$$

TROVARE A

SVOLGIMENTO = $A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \vdots & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

$D(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) =$

$c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

QUINDI =

$$\underset{1^\circ}{L_A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{2^\circ}{L_A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{3^\circ}{L_A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$

$\langle l_1, l_2, l_3, l_4 \rangle$

↳ COORDINATE DI $L(l_1)$ RISPETTO $\langle 1, x, x^2 \rangle$

$\Downarrow$

$$\langle \underset{\mathcal{E}_1}{\underset{\parallel}{1}}, \underset{\mathcal{E}_2}{\underset{\parallel}{x}}, \underset{\mathcal{E}_3}{\underset{\parallel}{x^2}} \rangle \qquad A \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Verifica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftarrow A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} a.$$

$\leftarrow$ i-ESIMA POSIZIONE $\Rightarrow$ i-ESIMA COLONNA

MATRICE A FA QUEL CHE DEVE SUGLI INPUT $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

E SUGLI ALTRI?

PROVIAMO SU INPUT QUALSIASI $\quad a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \xrightarrow{D} a_1+2a_2+3a_3^2$

$$\begin{array}{c} a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \\ \big\downarrow \text{COORDINATE} \\ \begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}c_1\\2c_2\\3c_3\end{pmatrix} \end{array}$$

TEO: SE $f: V \to W$ LINEARE $\langle l_1, \dots, l_n \rangle$ DI V, $v \in V$ PER CONOSCERE $f(v)$ BASTA SAPERE $f(l_1), \dots, f(l_n)$

$v = c_1 l_1 + \dots + c_n l_n \qquad f(v) = f(c_1 l_1 + \dots + c_n l_n)$

$$\overset{\text{LINEARITÀ}}{=} c_1 f(l_1) + \dots + c_n f(l_n)$$

TEO = DUE BASI DELLO STESSO SPAZIO HANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI

$V = \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ $\quad W \subset V$ $\quad W = \{ p(x) \in V \mid p(1) = 0 \}$

È UN SOTTOSPAZIO. CHI È UNA BASE?

OSS IMPORTANTE: $p(1) = 0 \iff (x-1) \mid p(x)$

$p(1) = 0 \iff p(x) = (x-1)\, g(x) \quad \exists\, g(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$

$\iff \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{p(x)} = (x-1)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) =$

$= c_0(x-1) + c_1(x-1)x + c_2(x-1)x^2$

BASE $= \langle \underset{\substack{\Downarrow \\ e_1}}{(x-1)}, \underset{\substack{\Downarrow \\ e_2}}{(x^2-x)}, \underset{\substack{\Downarrow \\ e_3}}{(x^3-x^2)} \rangle$

$\dim W = 3$

ESERCIZI: V = MATRICI 2·2 $\quad$ W = MATRICI 2·2 CON TRACCIA = 0

TRACCIA: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ $\quad$ SOMMA ELEMENTI SULLA DIAGONALE

SVOLGIMENTO: BASI? $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$

$b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

BASE DI V = $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$

$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$

$\Updownarrow$

$a + d = 0$

$d = -a$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \leftarrow$ MATRICE DI TRACCIA ZERO

$\Downarrow$

$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

OSS: LE MATRICI DI TRACCIA 0 SONO W = SPAN (DI QUESTE MATRICI)

QUINDI COORDINATE DI $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ SONO $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$