Polinomi in $R[x]$

ES: $1+2x+3x^2 = v_1$

$2x^2+5x^3 = v_2$ $\qquad v_1+v_2 = 1+2x+5x^2+5x^3$

1) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ($V = \mathbb{R}^2$ cioè $V = Mat_{3\times 1}(\mathbb{R})$).

$W \subset V$ è un sottospazio vettoriale se

1) $\bar{0} \in W$

2) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

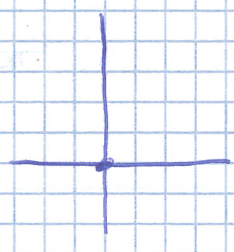
3) $w \in W$, r è scalare $\Rightarrow r \cdot w \in W$

IMPORTANTE: I sottospazi $V = \mathbb{R}^2$ sono

1) le rette per $\bar{0}$

2) $\mathbb{R}^2$

3) $\{\bar{0}\}$



$3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Sottospazioni in $\mathbb{R}^3$

Rette per $\bar{0}$

piani per $\bar{0}$

$\mathbb{R}^3$

$\bar{0}$

Esempio

$w_1, w_2 \in W$

$$\{r_1 w_1 + r_2 w_2 \mid r_1 \wedge r_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Span}(w_1, w_2)$$

Combinazione lineare $= r_1 w_1 + \dots + r_n w_n \in W$

Oss: lo span di due vettori è il piano che passa per i due vettori

OSS: V spazio vettoriale di K ($K = \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{C}$ etc)

$v_1, \dots v_n \in V$

Span$(v_1, \dots v_n)$ è un sottospazio?

$\rightarrow \bar{0} \in$ Span$(v_1, v_2 \dots v_n)$ $\rightarrow$ sì! $\bar{0} = 0v_1 + \dots + 0v_n$

$\rightarrow w_1 + w_2 \in$ Span$(\dots)$ $\rightarrow$ sì! $\hookrightarrow c_1 v_1 + \dots + c_n v_n + a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$$\Downarrow$$

$$(c_1 + a_1)v_1 + (c_2 + a_2)v_2 + \dots + (c_n + a_n)v_n$$

$\rightarrow w \in$ Span$(\dots) \Rightarrow \lambda w = \lambda(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = \lambda(a_1 v_1) + \dots + \lambda(a_n v_n) =$

$(\lambda a_1)v_1 + \dots + (\lambda a_n)v_n \rightarrow$ sì!

OSS: Tutti gli span sono sottospazi, ma il contrario è vero? Sì!

Dim: $W \subset \mathbb{R}^3$ sottospazio, W è uno span?

$x + 2y + 3z = 0$

Soluzioni: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + 2y + 3z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$Mat_{1 \cdot 3} \cdot Mat_{3 \cdot 1} = 0$ $\quad [1, 2, 3] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

pivot x — libere y — libere z

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ 2 soluzioni speciali $\hookrightarrow$ perché ci sono 2 variabili libere

$?_1 = -3$ $\qquad ?_2 = -2$

$z = 1$ $\qquad z = 0$

$y = 0$ $\qquad y = 1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} \in W$$

$$\text{Span}(v_1, v_2) = z_0 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2y_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z_0 - 2y_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$