DATA: 23/02/16

Equazioni Lineari

$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$ ← SCALARE: REALE, COMPLESSO, $\mathbb{Z}_{(p)}$ PRIMO

$3x + 7y = 33$

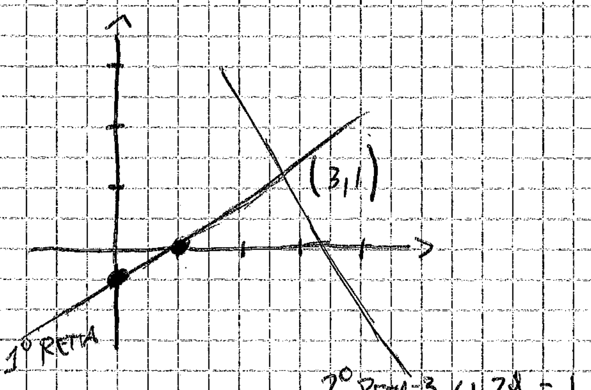
NON LINEARE: $x^2 + 2^y = 3$ $\quad x \cdot y = 1$

Sistemi Lineari

$$\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

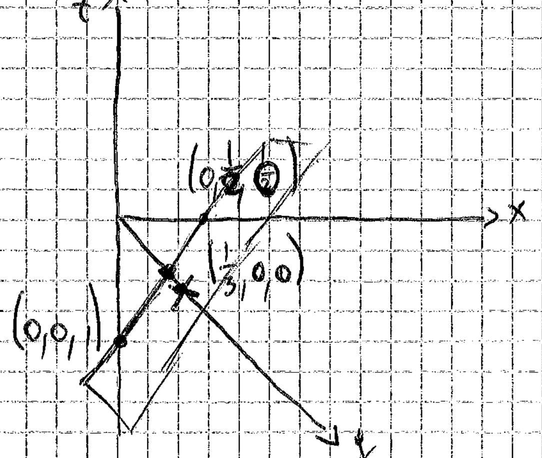
ESE: $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$ TROVARE IL VETTORE (COPPIA) (x, y)

OSS: GEOMETRICAMENTE LA FIGURA: GRAFICO DI $x - 2y = 1$



1° PUNTO = $(1, 0)$ 2° PUNTO = $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

ESE: $3x + 2y - z = 1$



OSS:

INTERSEZIONE DI 2 PIANI = RETTA

INTERSEZIONE DI 3 PIANI = PUNTO

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

COME RISOLVERE?

MOSSE DI RIGA:

1 - POSSO SCAMBIARE DUE RIGHE

2 - MOLTIPLICARE UNA RIGA PER UNO SCALARE $\neq 0$ ES: $x - 2y = 1 \leftrightarrow 3x - 6y = 3$

3 - SOMMARE O SOTTRARRE DUE RIGHE

4 - SOMMO A UNA RIGA UN MULTIPLO DI UN'ALTRA RIGA ($\underline{2+3}$ INSIEME) REGOLE

RISCRIVIAMOLA $\updownarrow$ $R_2 := R_2 - 3R_1$ QUINDI: $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 0 + 8y = 8 \end{cases}$ = $8y = 8 \Leftrightarrow y = 1$

SOSTITUISCO $y = 1$ IN $x - 2y = 1$ VIENE $x - 2 \cdot 1 = 1 \leftrightarrow x = 3$

QUINDI: $x = 3$ $y = 1$ ESEMPIO CON UN'UNICA SOLUZIONE

ALTRO ESEMPIO: $\left.\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \\ 5x - y = 7 \end{cases}\right) \to \begin{matrix} x = 3 \\ y = 1 \end{matrix}$ QUINDI: $\emptyset$ SOLUZIONI

ESEMPI: 2X2 (2 VARIABILI, 2 EQUAZIONI) ~~…~~ 60

$\to$ 1 SOLUZIONE (FATTA IN PRECEDENZA) (2 RETTE CHE S'INTERSECANO)

$\to$ ∞ SOLUZIONI $\to$ $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$ (2 RETTE SOVRAPPOSTE)

$\to$ 0 SOLUZIONI $\to$ $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ (2 RETTE PARALLELE)

MATRICI

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} +1 & -2 & 1 \\ +3 & +2 & 11 \end{array}\right]$$

SI RISCRIVE USANDO SOLTANTO I COEFFICIENTI, SI USA LA SBARRA PER DIFFERENZIARE GLI SCALARI

OPPURE

$$\begin{bmatrix} +1 & -2 \\ +3 & +2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

TEOREMA

LE MOSSE DI RIGA NON ALTERANO L'INSIEME DELLE SOLUZIONI

DIM =
$$\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \xleftrightarrow{\;R_2 - 3R_1\;} \begin{cases} A = B \\ C - 3A = D - 3B \end{cases}$$

$\rightarrow$

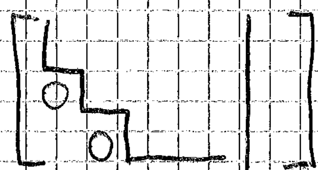
$\leftarrow$ PERCHÉ $A = B$ QUINDI $C - \cancel{3A} = D - \cancel{3A}$ $\square$

DIMOSTRAZIONE SUL LIBRO (ORALE)

ESEMPI: 3×3

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 \\ -2x - 3y + 7z = 10 \end{cases} \quad \text{IN MATRICE} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

CON MOSSE DI RIGA



PIVOT

*
$$\begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \rightarrow \\ R_3 + R_1 \rightarrow \end{array} \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 0 + y + z = 4 \\ 0 + y + 5z = 12 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ y + z = 4 \\ y + 5z = 12 \end{cases}$$

*
$$R_3 - R_2 \quad \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ y + z = 4 \\ 0 + 4z = 8 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ y + z = 4 \\ z = 4 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

COME RISOLVERE?

SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO

$z = 2$ SOSTITUISCO IN R_2 QUINDI $y + 2 = 4 \rightarrow y = 2$ QUINDI

SOSTITUISCO $z = 2$, $y = 2$ IN R_1 QUINDI $2x + 8 - 4 = 2 \rightarrow x = -1$

QUINDI COME SOLUZIONE AVREMO $(x, y, z) = (-1, 2, 2)$

~~ESERCITAZIONE~~

MATRICI

È UNA DISPOSIZIONE DI NUMERI FORMATA DA m RIGHE, k COLONNE

$$\text{MATRICE } mat_{m \cdot k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix} \leftarrow (a_{ij}) \quad i \le m;\ j \le k$$

PRODOTTO TRA MATRICI

$$Mat_{m \cdot k} \times Mat_{k \cdot n} = Mat_{m \cdot n}$$

$$Mat_{3 \cdot 2} \times Mat_{2 \cdot 7} = Mat_{3 \cdot 7}$$

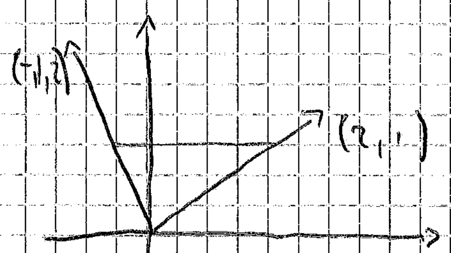
ESEMPIO $= Mat_{3 \cdot 1}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ v vettore colonna

$Mat_{1 \cdot 3}$ $(1, 2, 4)$ w vettore riga

$$w \cdot v = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 2 + 6 + 4 = 12 \qquad Mat_{1 \cdot 1}$$

$$\cancel{v \cdot w = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 + 2 + 4 = 2 + 4 + 8 + 3 + 6 + 4 + 1 + 2 + 4 = 34}$$

ORTOGONALITÀ



TRASPONDERE = METTERE IN VERTICALE

$$(-1, 2)^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{QUINDI MOLTIPLICO}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} (2, 1) = -2 + 2 = 0$$

OSS = DUE VETTORI SONO PERPENDICOLARI SSE IL LORO PRODOTTO FA $\emptyset$

↑ ORTOGONALI

PRODOTTO SCALARE

$$\langle v, w \rangle = v \text{ in riga} \times w \text{ in colonna} = \cos(\theta) \cdot \|v\| \cdot \|w\|$$

OSS = Se HO PIÙ VARIABILI CHE EQUAZIONI HO INFINITE SOLUZIONI!

DATA: 25/02/16

PRODOTTO DI MATRICI

MATRICI $m \cdot k$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

m righe
k colonne

$Mat_{m \cdot k}(\underset{\text{DI REALI}}{\mathbb{R}})$

IL PRODOTTO DI UNA $MAT_{m \cdot k} \times Mat_{k \cdot m} = M_{m \cdot m}$

ES: $\underset{m \cdot k}{\underbrace{A}} \cdot \underset{k \cdot m}{\underbrace{B}} = \underset{m \cdot m}{\underbrace{C}} \rightarrow A = (a_{ij})$ $B = (b_{jl})$ $C(c_{il})$

i = RIGA $\leq m$; $j \leq k$

j = RIGA $\leq k$; $l \leq m$ = colonne

$i \leq m$ = RIGA ; $l \leq m$ COLONNA

FORMULA: c_{il} = (i-esima riga di A) $\times$ (l-esima colonna di B)

$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}) \times (b_{1l}, b_{2l}, \dots, b_{kl})$ ← IN VERTICALE

e deve uguale a $= a_{i1} b_{1l} + a_{i2} b_{2l} + \dots + a_{ik} b_{kl}$.

CON LA SOMMATORIA: $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \cdot b_{jl} = c_{il}$

ES: $Mat_{2 \times 3} \times Mat_{3 \times 2} = Mat_{2 \times 2}$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} \overset{c_{11} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{2} & \overset{c_{12}}{1} \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 1$

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} b_{31} =$

$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} + b_{32} =$

SISTEMI LINEARI

STAR

$$* \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ← $Mat_{2 \cdot 3}$

$\underset{MAT_{2 \cdot 3}}{A} \underset{MAT_{3 \cdot 1}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2x + 3y - z \\ 5x - 2y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

IL SISTEMA * LO POSSO RISCRIVERE: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

COME TROVIAMO x, y, z?

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 3 \end{cases} \leftarrow \left(5x + \frac{15}{2}y - \frac{5}{2}z = 5\right)$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 0 - \frac{19}{2}y + \frac{9}{2}z = -2 \leftarrow R_2 - \frac{5}{2}R_1 \end{cases}$$

IN MATRICI

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{19}{2} & +\frac{9}{2} & -2 \end{array}\right) \leftarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

↑ SCALINO

◯ = PIVOT, OVVERO I NUMERI AGLI ANGOLI

VARIABILI LIBERE: SONO LE VARIABILI ~~DIVERSE / DAI / PIVOT~~ CHE CORRISPONDO ALLE COLONNE DOVE NON C'È UN PIVOT

QUINDI IN QUESTO CASO: z È LIBERA $= \frac{9}{2}$

PROCEDIAMO: PRENDIAMO LA SECONDA RIGA E TROVIAMO LA y ↗ IL PIVOT

$$-\frac{19}{2}y = -2 - \frac{9}{2}z \rightarrow \frac{19}{2}y = 2 - \frac{9}{2}z \rightarrow 19y = 4 + 9z \rightarrow y = \frac{4}{19} + \frac{9}{17}z$$

SOSTITUIAMO NELLA PRIMA RIGA: $2x + 3y - z = 2 \rightarrow 2x = 2 - 3y + z \rightarrow x = 1 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z$

$$\rightarrow x = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{4}{19} + \frac{9}{19}z\right) + \frac{1}{2}z \rightarrow 1 - \frac{6}{19} - \frac{4}{19}z \rightarrow x = \frac{13}{19} - \frac{4}{19}z$$

$$-\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{19} = -\frac{27}{38}$$

QUINDI: $y = \frac{4}{19} + \frac{9}{19}z$ ~~e~~ $x = \frac{13}{19} - \frac{4}{19}z$ CON z LIBERA!

RISCRIVIAMOLA SOTTOFORMA DI VETTORE:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{19} - \frac{4}{19}z \\ \frac{4}{19} + \frac{9}{19}z \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/19 \\ 4/19 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -4/19 \\ 9/19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↳ È LA "z"

CONCLUSIONE

LE $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ CHE RISOLVONO IL SISTEMA * SONO DELLA FORMA $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{9} - \frac{4}{19}k \\ \frac{4}{19} + \frac{9}{19}k \\ k \end{pmatrix}$

GRADO DI LIBERTÀ = QUANTE VARIABILI LIBERA CI SONO NEL ~~[illegible]~~ VETTORE

QUINDI ABBIAMO 1 GRADO DI LIBERTÀ

Combinazione Lineare

Le matrici e i vettori si possono sommare, sse hanno le stesse dimensioni:

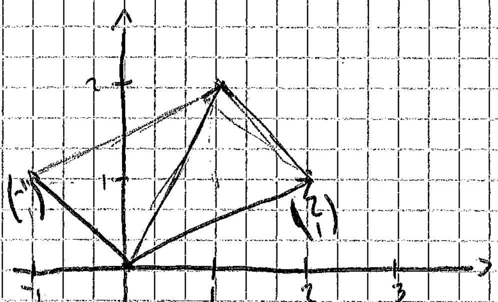
Formula: $Mat_{m \cdot k} + Mat_{m \cdot k} = Mat_{m \cdot k} \Rightarrow \underset{\substack{i \le m \\ j \le k}}{(a_{ij})} + \underset{\substack{i \le m \\ j \le k}}{(b_{ij})} = (c_{ij})$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Oss: $k \cdot (a_{ij})_{ij} = (k a_{ij})_{ij}$

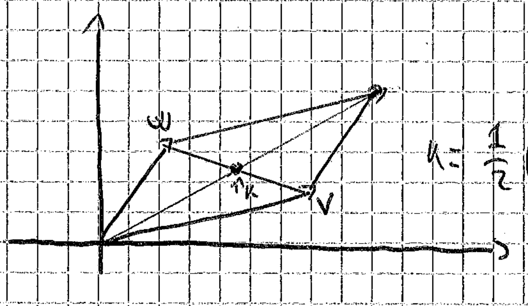
Geometricamente i vettori

I vettori si sommano con la regola del parallelogramma.



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Dati 2 vettori,

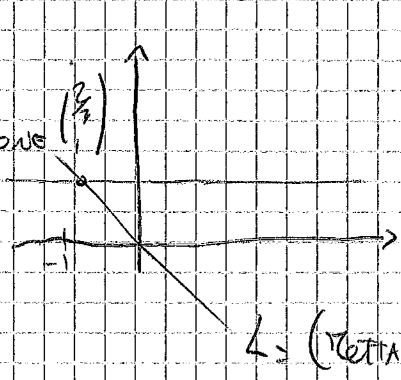


$k = \frac{1}{2}(v + w)$

Retta

2 modi di descrivere una retta nel piano passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

① $\begin{cases} ax + by = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$ sottoforma di equazione



L = (retta)

② METODO PARAMETRICO

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; 3x + 2y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}k \\ k \end{pmatrix} \middle| \; k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ k \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; k \in \mathbb{R} \right\}$$

OSS: MATRICI A, B $\rightarrow$ $A \cdot B = B \cdot A$? NO!

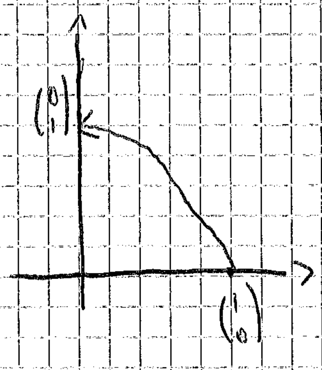
LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA NON VALE PER LE MOLTIPLICAZIONI TRA MATRICI.

MATRICI COME FUNZIONI (LINEARI)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}}_{W} \Rightarrow AV = W$$

QUINDI $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

ROTAZIONI NEL PIANO



$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

QUINDI: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

SPAZIO VETTORIALE:

UN INSIEME V SI DICE UNO SPAZIO VETTORIALE SUL VETTORE K SE SONO DEFINITE DUE FUNZIONI A VALORI IN V:

① UNA FUNZIONE $V \times V$ IN V (ADDIZIONE VETTORIALE), TALE CHE $\forall u, v \in V \Rightarrow u+v \in V$

② UNA FUNZIONE TRA UN ELEMENTO K ED UN ELEMENTO DI V (MOLTIPLICAZIONE SCALARE)

TALE CHE $\forall \lambda \in K \wedge \forall v \in V \overset{\text{ASSOCIA}}{\Rightarrow} \lambda \cdot v$

E SE TALI FUNZIONI RISPETTANO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELL'ADDIZIONE = $\forall u, v, w \in V$ VALE $(u+v)+w = u+(v+w)$

2- PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELL'ADDIZIONE = $\forall v, w \in V$ VALE $v+w = w+v$

3- ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO DELL'ADDIZIONE = $\forall v \in V \; \exists 0 \in V$ TALE CHE $v+0 = v$

4- ESISTENZA DELL'OPPOSTO PER L'ADDIZIONE = $\forall v \in V \; \exists w \in V$ TALE CHE $v+w = 0$

5- PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELLA ~~ADDIZIONE~~ MOLTIPLICAZIONE = $\forall \lambda, \mu \in K \wedge \forall v \in V$ VALE CHE *

$$* \begin{cases} \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w \\ (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v \end{cases}$$

6- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE = $\forall \lambda, \mu \in K \wedge \forall v \in V$ VALE CHE $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

7- PROPRIETÀ DELL'ESISTENZA DELL'INVARIANTE MOLTIPLICATIVO = $\forall v \in V$ VALE $1 \cdot v = v$

OSS: LE PRIME 4 SONO IL GRUPPO COMMUTATIVO RISPETTO ALLA SOMMA

OSS: SE V È UNO SPAZIO VETTORIALE SU UN CAMPO K CHIAMEREMO <u>VETTORI</u> GLI ELEMENTI DI V E <u>SCALARI</u> GLI ELEMENTI DEL CAMPO K.

OSS: OGNI CAMPO K È UNO SPAZIO VETTORIALE SU K STESSO. IN PARTICOLARE DUNQUE $\mathbb{R}$ SU $\mathbb{R}$ e/o $\mathbb{Q}$ SU $\mathbb{Q}$

SOMMA TRA VETTORI

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

PRODOTTO TRA VETTORI

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE W DI V È UN SOTTOINSIEME $W \subseteq V$ CHE È UNO SPAZIO VETTORIALE SU K.

OSS: V È SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V E ANCHE $\{0\}$, QUINDI SOTTOSPAZIO VETTORIALE SARÀ PROPRIO SE È $\neq$ DA V E $\{0\}$

Def: DATO V SPAZIO VETTORIALE SU K E W SOTTOINSIEME DI V, W È SOTTOSPAZIO VETTORIALE SE E SOLO SE:

1- IL VETTORE 0 APPARTIENE A W (CONTENGONO L'ELEMENTO NEUTRO DELL'ADD VETTORIALE)

2- $\forall u, w \in V$ VALE $u + v \in W$ (CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA VETTORIALE)

3- $\forall k \in K \wedge \forall u \in W$ VALE $a \cdot v \in W$ (CHIUSO RISPETTO AL PRODOTTO SCALARE)

OSS: UNA CURVA CASUALE HA PROBABILMENTE NON SODDISFANTO IL PUNTO 0 PER ESEMPIO, UNA CIRCONFERENZA NON CONTIENE LO 0 O COMUNQUE NON SODDISFA LE ALTRE 2.

IN PARTICOLARE PERÒ, LE RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE SODDISFANO ①, ② e ③ SSe SONO SOTTOSPAZI VETTORIALI. ANCORA PIÙ IN PARTICOLARE, LE RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE SONO TUTTI E I SUOI SOTTOSPAZI VETTORIALI IN $\mathbb{R}^2$.

UNIONE ED INTERSEZIONE

$U \cap W$: È SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V (È IL PIÙ GRANDE SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V CONTENUTO SIA IN U, SIA IN W).

$U \cup W$ = È SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V (A VOLTE!) (IN GENERALE NO)

OSS = QUINDI QUAL È IL PIÙ PICCOLO SOTTOSPAZIO VETTORIALE? DEFINIAMO:

$U + W = \{u + w \mid u \in V, w \in W\}$ ← ESSO È IL PIÙ PICCOLO SOTTOSPAZIO VETTORIALE, E LO È SEMPRE!

MATRICI

È UN UTILE RAPPRESENTAZIONE DELLE APPLICAZIONI LINEARI TRAMITE QUESTI "OGGETTI"

- SOMMA $M_1 + M_2$ $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8\\10&12\end{pmatrix}$
- MOLTIPLICAZIONE $k \cdot M$ $3\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\0&12\end{pmatrix}$
- MOLTIPLICAZIONE $M_1 \cdot M_2$ $\begin{pmatrix}1&2&4\\0&6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&2\\5&6&-8\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&18&-14\\30&39&-48\end{pmatrix}$

FORMULA MOLTIPLICAZIONE: $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \cdot b_{jl} = c_{il}$

QUINDI IL 3° PUNTO =

$c_{11} = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} = 1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 4\cdot 0 = 12$

$c_{12} = a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} = 1\cdot 2 + 2\cdot 6 + 4\cdot 1 = 2+12+4 = 18$

$\vdots$

$c_{23} = a_{21}\cdot b_{13} + a_{22}\cdot b_{23} + a_{23}\cdot b_{33} = 0\cdot 2 + 6\cdot -8 + 3\cdot 0 = 0-48+0 = -48$

MATRICE ASSOCIATA (APP LINEARE)

OSS: MATR ASSOCIATA AD $L \Rightarrow [L]$

SIANO V E W DUE SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE m COL m E SIA $T: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE DI V IN W

SIA INOLTRE $B = \{v_1, v_2, \dots v_m\}$ UNA BASE DELLO SPAZIO VETTORIALE V E $C = \{w_1, w_2, \dots w_m\}$ UNA BASE DI W

PER OGNI VETTORE v_i (DELLA BASE B DELLO SPAZIO VETTORIALE V) DETERMINIAMO LA CORRISPONDENTE IMMAGINE TRAMITE L'APPLICAZIONE LINEARE T. DETERMINIAMO CIOÈ $T(v_1), T(v_2), \dots T(v_m)$.

I NUOVI VETTORI COSÌ OTTENUTI SARANNO ELEMENTI DELLO SPAZIO VETTORIALE W E POTRANNO ESSERE SCRITTI COME COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ELEMENTI $w_1, w_2, \dots, w_m$ CHE FORMANO LA BASE C DELLO SPAZIO W.

SI HA QUINDI

$T(v_1) = a_{11} w_1 + a_{12} w_2 + \dots + a_{1m} w_m$

$T(v_m) = a_{1m} w_1 + a_{2m} w_2 + \dots + a_{mm} w_m$

$\Rightarrow A_T^{B,C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$ ALLE BASI B E C

MATRICE ASS. ALL'APP LINEARE T RISPETTO

MATRICE A SCALINI:

PRESA UNA MATRICE $A_{m \cdot n}$ ED UTILIZZANDO LE SEGUENTI OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE COLONNE SI:

1 - SOMMA ALLA COLONNA LA COLONNA J MOLTIPLICATA PER UNO SCALARE
2 - MOLTIPLICA UNA COLONNA J PER UNO SCALARE $\neq 0$
3 - SI PERMUTANO FRA DI LORO DUE COLONNE

OSS: È SEMPRE POSSIBILE RIDURRE LA MATRICE A "SCALINI" CON UN NUMERO FINITO DI OPERAZIONI

ES = ?

PROFONDITÀ = CHIAMIAMO PROFONDITÀ DI UNA COLONNA LA POSIZIONE OCCUPATA DAL SUO PIÙ ALTO COEFFICENTE DIVERSO DA $\emptyset$. ALLA COLONNA NULLA ASSEGNIAMO PROF Ø

ES: $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ 1° COLONNA = PROF = 2 2° COLONNA PROF = 3 3° COLONNA PROF = 1

?

Def = UNA MATRICE $M_{m \cdot n}(\mathbb{K})$ SI DICE IN FORMA A SCALINI PER COLONNE SE RISPETTA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1 - LEGGENDO LA MAT DA SINISTRA VERSO DESTRA, LE COLONNE NON NULLE SI INCONTRANO TUTTE PRIMA DELLE COLONNE NULLE
2 - LEGGENDO DA SX A DX, LA PROFONDITÀ DELLE SUE COLONNE NON NULLE RISULTANO STRETTAMENTE DECRESCENTI.

PIVOT = I COEFFICENTI PIÙ ALTI $\neq 0$ DI OGNI COLONNA NON NULLA

ES = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

MATRICE A SCALINI PER COLONNA RIDOTTA

SI DEFINISCE UNA $MAT_{m \cdot n}(\mathbb{K})$, ESSA VIENE CHIAMATA SE:

① A È A SCALINI PER COLONNA

② TUTTE LE ENTRATE NELLA STESSA RIGA DI UN PIVOT (PRECEDENTI AD ESSO SONO NULLE).

OSS: È SEMPRE POSSIBILE FARLO

PAG. 27 N° 2, 3 — SISTEMI LINEARI — 01/03/16

~~$P_1 = 52$ mm~~

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

~~$P_2 = 22$ mm~~ A = MATRICE

$\vec{b}$ = VETTORE COLONNA $\quad \vec{x} = (x, y, z)$ CHE VOGLIAMO TROVARE

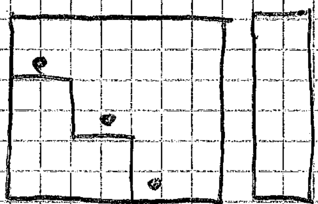
ELIMINAZIONE DI GAUSS - JORDAN

MATRICI QUADRATE = $M_{n \cdot n}$

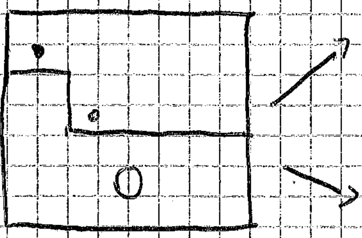
$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad Mat_{n \cdot n} \times Mat_{n \cdot 1} = Mat_{n \cdot 1}$$

x = INCOGNITE DA TROVARE

SOLUZIONI



1 SOLUZIONE



→ 0 SOLUZIONI

→ ∞ SOLUZIONI

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x - y = b_1 \\ -x + 2y + z = b_2 \\ -y + 2z = b_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$Op_1 = R_2 + \frac{1}{2}R_1 \qquad 1°$ RIGA $= \left(1x - \frac{1}{2}y + 0 = \frac{1}{2}b_1\right)$

$$\begin{cases} 2x - y = b_1 \\ 0 + \frac{3}{2}y - z = \frac{1}{2}b_1 + b_2 \\ -y + 2z = b_3 \end{cases}$$

$Op_2 = R_3 + \frac{2}{3}R_2 \qquad \left(\frac{2}{3}z = +\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}b_1 + b_2\right)\right)$

$$\begin{cases} 2x - y = b_1 \\ 0 \quad + \frac{3}{2}y - z = \frac{1}{2}b_1 + b_2 \\ 0 \quad 0 \quad + \frac{4}{3}z = \frac{1}{3}b_1 + \frac{2}{3}b_2 + b_3 \end{cases}$$

PIVOT 1° RIGA = 2

PIVOT 2° RIGA = $\frac{3}{2}$

PIVOT 3° RIGA = $\frac{4}{3}$

$$\begin{cases} 2x & -y & 0 = b_1 \\ 0 & \frac{3}{2}y & -z = \frac{1}{2}b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & +\frac{4}{3}z = \frac{1}{3}b_1 + \frac{2}{3}b_2 + b_3 \end{cases} \iff R_2 + \frac{3}{4}R_3 \begin{cases} 2x & +y & 0 = b_1 \\ 0 & +\frac{3}{2}y & 0 = \frac{3}{4}b_1 + \frac{3}{2}b_2 + \frac{3}{4}b_3 \\ 0 & 0 & +\frac{4}{3}z = \frac{1}{3}b_1 + \frac{2}{3}b_2 + b_3 \end{cases}$$

$$\iff R_1 + \frac{2}{3}R_2 \begin{cases} 2x & 0 & 0 = \frac{3}{2}b_1 + b_2 + \frac{1}{2}b_3 \\ 0 & \frac{3}{2}y & 0 = \frac{3}{4}b_1 + \frac{3}{2}b_2 + \frac{3}{4}b_3 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}z = \frac{1}{3}b_1 + \frac{2}{3}b_2 + b_3 \end{cases}$$

DIVIDO PER I PIVOT

$$\begin{cases} x & 0 & 0 = \frac{3}{4}b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{1}{4}b_3 \\ 0 & y & 0 = \frac{1}{2}b_1 + b_2 + \frac{1}{2}b_3 \\ 0 & 0 & z = \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{4}b_3 \end{cases}$$

← RISOLTO 1 SOLUZIONE PERCHE TUTTI I PIVOT $\neq 0$

QUINDI:

$$\underbrace{\overset{\text{INIZIO}}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}}_{A = \text{INPUT}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\overset{\text{FINE}}{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}}}_{A_1 = \text{OUTPUT}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

MATRICE INVERSA $m \cdot m$

→ NON ESISTE SEMPRE

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \iff A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad Av = w \iff A^{-1}w = v$$

OSS = L'INVERSO DI UNA MATRICE ESISTE SOLO NEI CASI IN CUI IL SISTEMA HA UN'UNICA SOLUZIONE

OSS = SE NON È UNA MATRICE QUADRATA NON HA SENSO FARLO

Matrice identità

$$\underset{[n\cdot n]}{A} \cdot \underset{[n\cdot n]}{A^{-1}} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \leftarrow \text{Matrice identità}$$

Sistema 3·3 senza soluzione

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \xleftrightarrow[R_2+\frac{1}{2}R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&0\\0&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&1\\0&-1&-1&-2\\x&y&z&\end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow[R_3+\frac{2}{3}R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&0\\0&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&1\\0&0&0&-\frac{4}{3}\end{array}\right)$$

$R_3: 0x + 0y + 0z = -\frac{4}{3}$

$0 = -\frac{4}{3}$

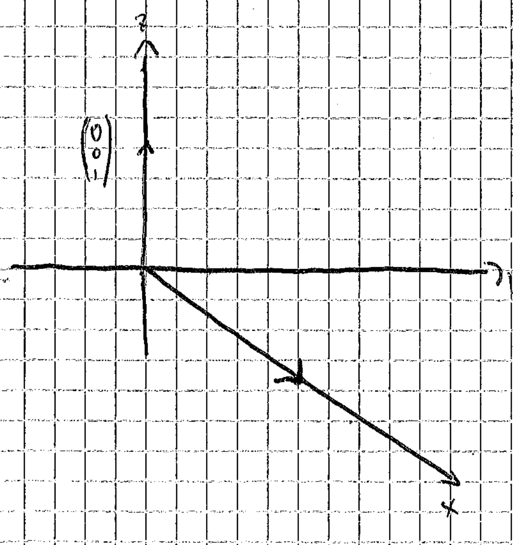
ASSURDO

NON C'È SOLUZIONE

Il sistema $A\underset{\substack{\uparrow\\ \text{da trovare}}}{\vec{x}} = \vec{w} \leftarrow$ noto ha soluzione $\Leftrightarrow$ w è combinazione lineare dei vettori colonna di A

Vettori in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo due vettori in $\mathbb{R}^3$



$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

SPAN:

$$\left\{ x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, x,y \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \text{SPAN}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \in \qquad \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \in$$

OSS: LO SPAN DI n VETTORI SONO TUTTE LE COMBINAZIONI LINEARI CHE SI POSSONO FARE (~~spesso~~ SI OTTIENE UN PIANO)

SPAZIO VETTORIALE DATA: 3/03/16

→ CAMPO ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{C}$, ecc) ← $+, \cdot, 0, 1$

→ UN INSIEME DI VETTORI (UN GRUPPO DI DUE VETTORI) ← $+, 0$

→ MOLTIPLICAZIONE SCALARE PER VETTORE = VETTORE

ASSIOMI

$r_1 \dots r_n$ SCALARE

$v_1 \dots v_n$ VETTORE

$$\bar{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ:

$$v + \bar{0} = v$$
$$v + (-v) = \bar{0}$$
$$r(v+w) = rv + rw$$
$$(r_1 + r_2)v = r_1 v + r_2 v$$
$$(r_1 r_2) v = r_1 (r_2 v)$$
$$0 \cdot v = 0$$
$$1 \cdot v = v$$

DEF DI SPAZIO VETTORIALE

ES: CAMPO $\mathbb{R}$ ~~2~~ 5

VETTORI $\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$MAT_{3,1}(\mathbb{R})$

DIM: $(r_1 r_2)v = r_1(r_2 v)$

$$(2\cdot 3)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\12\\0\end{pmatrix}$$

$$2\left(3\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\12\\0\end{pmatrix}$$

Polinomi in $R[x]$

ES: $1+2x+3x^2 = v_1$

$2x^2+5x^3 = v_2$ $\qquad v_1+v_2 = 1+2x+5x^2+5x^3$

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ($V=\mathbb{R}^2$ cioè $V=Mat_{3,1}(\mathbb{R})$).

$W \subset V$ è un sottospazio vettoriale se

1) $\bar{0} \in W$

2) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1+w_2 \in W$

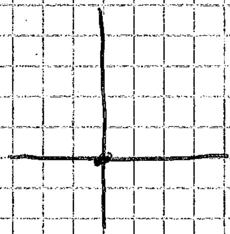
3) $w \in W$, $r \in$ scalare $\Rightarrow r \cdot w \in W$

IMPORTANTE: I sottospazi $V=\mathbb{R}^2$ sono

1) le rette per $\bar{0}$

2) $\mathbb{R}^2$

3) $\{\bar{0}\}$



$3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sottospazioni in $\mathbb{R}^3$

Rette per $\bar{0}$

piani per $\bar{0}$

$\mathbb{R}^3$

$\bar{0}$

Esempio

$w_1, w_2 \in W$

$\{r_1 w_1 + r_2 w_2 \mid r_1 \wedge r_2 \in \mathbb{R}\}$

$\Downarrow$

$Span(w_1, w_2)$

Combinazione lineare $r_1 w_1 + \dots + r_n w_n \in W$

Oss: lo span di due vettori è il piano che passa per i due vettori

OSS: V SPAZIO VETTORIALE di K ($K = \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{C}$ ETC)

$v_1, \dots, v_m \in V$

SPAN $(v_1, \dots v_m)$ È UN SOTTOSPAZIO?

$\to$ $\bar{0} \in \text{Span}(v_1, v_2 \dots v_m)$ $\to$ SI! $\bar{0} = 0v_1 + \dots + 0 v_m$

$\to$ $w_1 + w_2 \in \text{SPAN}(\dots)$ $\to$ SI! $\to$ $c_1 v_1 + \dots + c_m v_m + a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$

$\Downarrow$

$(c_1 + a_1)v_1 + (c_2 + a_2)v_2 + \dots + (c_m + a_m)v_m$

$\to$ $w \in \text{Span}(\dots) \Rightarrow \tau w = \tau(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) = \tau(a_1 v_1) + \dots + \tau(a_m v_m) =$

$(\tau a_1)v_1 + \dots + (\tau a_m)v_m$ $\to$ SI!

OSS: TUTTI GLI SPAN SONO SOTTOSPAZI, MA IL CONTRARIO È VERO? SI!

DIM: $W \subset \mathbb{R}^3$ SOTTOSPAZIO, W È UNO SPAN?

$x + 2y + 3z = 0$

SOLUZIONI $= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x + 2y + 3z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$\text{Mat}_{1,3} \cdot \text{Mat}_{3,1} = 0$ $\qquad [1, 2, 3] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

PIVOT x LIBERE y LIBERE z

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ?_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ 2 SOLUZIONI SPECIALI $\Leftarrow$ PERCHÉ CI SONO 2 VARIABILI LIBERE

$?_1 = -3 \qquad ?_2 = -2 \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} \in W$

$z = 1 \qquad z = 0$
$y = 0 \qquad y = 1$

$\text{SPAN}(v_1, v_2) = z_0 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2y_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z_0 - 2y_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

ESERCIZI

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + (1+4k)x_3 = 1+4k \\ 2x_1 + (k+1)x_2 + (2+7k)x_3 = 1+7k \\ 3x_1 + (k+2)x_2 + (3+9k)x_3 = 1+9k \end{cases}$$

0 soluzioni

1 soluzione

∞ soluzioni

MATRICE =
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1+4k & 1+4k \\ 2 & k+1 & 2+7k & 1+7k \\ 3 & k+2 & 3+9k & 1+9k \end{array}\right]$$

$R_2 - 2R_1$ → $2x_1 + 2kx_2 + (2+8k)x_3 = 2+8k$

$$\begin{array}{cccc} 1 & +k & (1+4k) & = 1+4k \\ 0 & -k+1 & -k & = -1-k \\ 3 & k+2 & 3+9k & = 1+9k \end{array}$$

$R_3 - 3R_1$

$3 \quad +3k \quad +3+12k \mid +3+12k$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1+4k & 1+4k \\ 0 & -k+1 & -k & -1-k \\ 0 & (-2k+2) & -3k & -2-3k \end{array}\right]$$

$R_3 - 2R_2$

$0 \quad -2k+2 \quad -2k \mid -2-k$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1+4k & 1+4k \\ 0 & -k+1 & -k & -1-k \\ 0 & 0 & -k & -k \end{array}\right]$$

$k \neq 0,1$
$\Rightarrow$ 3 PIVOT
$\Rightarrow$ unica soluzione
matrice invertibile

CASI STRANI:

$k=0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3 libera

$0x_3 = 0$

x_1, x_2 le ricavo dalle prime due equazioni

∞ soluzioni

$k=1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$R_3 - R_2$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$0x_3 = 1$
NO soluzioni

Es =

$x+2y+3z=0$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Soluzioni = $Ker([1,2,3])$

$= Span(???)$

$x = -2y - 3z$

SOLUZIONI PARTICOLARI

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

OTTENUTI DAL SISTEMA $x+2y+3z=0$

$$Span=\left[\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$ ← tutte le possibili soluzioni

QUINDI = $\begin{pmatrix}-2y_0 & +3z_0\\ & y_0\\ & z_0\end{pmatrix} = y_0\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+z_0\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$

DOVE y_0 e z_0 SONO SCALARI!

Ker(A) = è quel vettore che moltiplicato per una matrice "X" dà il vettore $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Es =

$$\underset{3\cdot4}{A} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\2 & 2 & 8 & 10\\3 & 3 & 10 & 13\end{bmatrix} = \underset{4\cdot1}{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\underset{3\cdot1}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}$$

Troviamo il Ker(A)

Oss = Sicuramente ∞ soluzioni, poiché ci sono più variabili che equazioni!

$$\begin{matrix}R_2-2R_1\\ \\R_3-3R_1\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 4 & 4\\0 & 0 & 4 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 4 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

x_4 LIBERA

$4x_3 + 4x_4 = 0$

$=$

$x_3 + x_4 = 0$

ALTRA PAGINA

VARIABILI = x_2 e x_4 POICHÉ NON HANNO I PIVOT

x_2 LIBERA

$x_1 = -x_2 - 2x_3 - 3x_4$

TROVIAMO LE SOLUZIONI PARTICOLARI:

$$\begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow x_4 \qquad \begin{pmatrix} ? \\ 1 \\ ? \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow x_2$$

1° SOLUZIONE PARTICOLARE   2° SOLUZIONE PARTICOLARE

TUTTE LE SOLUZIONI

$$\text{Span}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \subset \mathbb{R}^4$$

DIMENSIONE 2 POICHÉ 2 VETTORI

ANALIZZIAMO LO SPAN:

$$\text{Span} \ni y_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0 - z_0 \\ y_0 \\ -z_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

CON $y_0 = x_2$ e $z_0 = x_4$

LINEARMENTE DIPENDENTI

DEFINIZIONE: VETTORI $v_1, v_2, \dots, v_n$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE ESISTONO $c_1, \dots, c_n \neq (0, 0, 0, \dots, 0)$ tale che $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$

ESEMPIO: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ESEMPIO: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$ SCEGLIAMO 2 VOLTE IL PRIMO, 2 VOLTE IL SECONDO, -1 VOLTA IL TERZO

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

USARNE 3 È SUPERFLUO DIFATTI

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1° SPAN: SE FACCIAMO LO SPAN $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}\right)$

È UGUALE SPAN 2° SPAN $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

ALTRA PAGINA →

Continuo Esercizio: $5\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}6\\10\\14\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+4\left[2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right]$

↑ 1° SPAN

$\Rightarrow 13\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+16\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ ← 2° SPAN

// SONO UGUALI

LINEARMENTE INDIPENDENTI

Definizione: Vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se $c_1v_1+\dots+c_nv_n=\bar{0} \Rightarrow c_1=\dots=c_n=0$

OSS: Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono DIPENDENTI $\Rightarrow$ uno dei v_i è nello span, ~~con $i \in \mathbb{N}$~~ degli altri

DIM: Esistono $c_1v_1+\dots+c_iv_i=\bar{0}$ con almeno un $c_i\neq 0$ con $i\in\mathbb{N}$

ES: $c_1\neq 0$ $\quad v_1=-\frac{1}{c_1}\left[c_2v_2+\dots+c_nv_n\right] \Rightarrow v_1\in \mathrm{span}(v_2,\dots,v_n)$

TEOREMA: $v_1,\dots,v_n$ sono DIPENDENTI

$\Downarrow$

Uno dei v_i è nello span degli altri

Prendiamo vettori in R^3

$$\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\3\\4\end{pmatrix}}\underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\5\\4\\3\end{pmatrix}}\underset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\7\end{pmatrix}}$$

3 vettori colonna sono dipendenti?

$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0$

$\Downarrow$

$c_1=0$

$c_1=0 \Rightarrow c_2v_2+c_3v_3=\bar{0}$

$\Downarrow$

$5c_2+0=0$

Es:
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

INDIPENDENTI

OSS:

MOSSA DI COLONNA NON CAMBIA LO SPAN

MOSSA DI RIGA NON CAMBIA LA ~~[illegible]~~ SOLUZIONI