

Compito di MD
A.A. 2012/13 – 4 giugno 2013

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1. Si consideri la successione definita da $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ e

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} + 1$$

per ogni $n \geq 1$. Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ vale $a_n \geq \frac{n}{2}$.

È possibile trovare un $c > \frac{1}{2}$ tale che per ogni $n \geq 0$ vale $a_n \geq cn$?

Esercizio 2. a) Quante sono le matrici 3×3 a coefficienti in \mathbb{Z}_3 tali che la somma dei coefficienti di ogni riga e la somma dei coefficienti di ogni colonna sia uguale a zero in \mathbb{Z}_3 ?

b) Quante sono le matrici 3×3 a coefficienti in \mathbb{Z}_3 invertibili?

Esercizio 3. Fattorizzare il polinomio

$$x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x - 1$$

come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{Z}_2[x], \mathbb{Z}_3[x]$.

Esercizio 4. Sia $L : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ l'applicazione lineare definita da:
 $L(a, b, c, d) = (a + b)x^3 + (c + d)x^2 + 2cx + 2d$.

a) Determinare una base di $\text{Ker } L$ e una base di $\text{Im } L$.

b) Dire se esiste un'applicazione lineare $G : \mathbb{Q}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{Q}^4$ tale che $\text{Ker } G = \text{Im } L$ e $\text{Im } G = \text{Ker } L$.