Es 1

a) Tra gli n^2 coeff della matrice devo scegliere le n posizioni in cui mettere 0

$$\binom{n^2}{n}$$

b) Costruisco la matrice per colonna mettendo esattamente uno 0 in ogni colonna con la condizione di non metterlo in una riga in cui ne ho già messo uno.

1^a colonna $\to$ n scelte

2^a colonna $\to$ $(n-1)$ scelte

k^a colonna $\to$ $(n-(k-1))$ scelte

In totale $n(n-1) \ldots (n-(n-1)) = n!$

c) Le matrici richieste si possono costruire partendo da una matrice $(n-1)\times(n-1)$ con esattamente uno 0 in ogni riga e uno zero in ogni colonna (per il punto b queste matrici sono $(n-1)!$), e aggiungendo a queste matrici una riga di tutti 1 e una colonna di tutti 1. Sia per la riga che per la colonna ho n posizioni possibili. Le matrici cercate sono quindi $n^2(n-1)! = n \cdot n!$

Esercizio 2

Le condizioni di risolubilità delle due congruenze del sistema sono soddisfatte.

Poiché l'inverso di 3 mod 7 è 5 la prima equazione ha come soluzione

$$x \equiv -8 \ (7) \quad \text{ovvero} \quad x \equiv -1 \ (7)$$

Prima di sostituire semplifichiamo la seconda equazione

$$8x \equiv 4 \ (30) \iff 4x \equiv 2 \ (15)$$

Inoltre 2 è invertibile mod 15, con inverso 8 per cui $2x \equiv 1 \ (15)$ e ancora

$$x \equiv 8 \ (15)$$

Ora sostituisco

$$\begin{cases} x = -1 + 7q \\ -1 + 7q \equiv 8 \ (15) \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 + 7q \\ 7q \equiv 9 \ (15) \end{cases}$$

Moltiplichiamo per 2

$$-q \equiv 3 \ (15) \quad \text{ovvero}$$

$$q = -3 + 15p$$

sostituiamo ed abbiamo la soluzione del sistema come classe di congruenza mod $7 \cdot 15 = 105$ (7 e 15 sono primi fra loro)

$$\boxed{x = -1 - 21 + p \cdot 105} \ (= -22 + p \ (105))$$

Le soluzioni intere tra 0 e 1000 si hanno per $\frac{22}{105} \le p \le \frac{1000 + 22}{105}$ ovvero $1 \le p \le 9$

per cui sono 9

Esercizio 3

- polinomio caratteristico di T_a

$$\det(T_a - tI) = \det\begin{pmatrix} -t & -3a & 0 \\ 1 & 2a-t & 0 \\ 1 & -3 & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$= (1-t)\left[-t(2a-t)+3a\right] =$$

$$= (1-t)(t^2-2at+3a)$$

- il discriminante di $t^2-2at+3a$ è $a^2-3a =$
$= a(a-3)$.

Dunque gli autovalori di T_a sono tutti e 3 reali $\Leftrightarrow$ $a \le 0$ oppure $a \geq 3$

In questo caso i 3 autovalori sono
$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = a + \sqrt{a^2-3a}$
$\lambda_3 = a - \sqrt{a^2-3a}$
(se $\boxed{a=0}$ oppure $\boxed{a=3}$ $\lambda_2 = \lambda_3$.

Vediamo se ci sono dei valori $a<0$ per cui $\lambda_1 = \lambda_2$ (non può essere $\lambda_1 = \lambda_3$ perché se $a<0$ $\lambda_3 < 0$).

$$1 = a + \sqrt{a^2-3a} \iff \underset{\overset{\vee}{0}}{1-a} = \underset{\overset{\vee}{0}}{\sqrt{a^2-3a}}$$

$$1-2a+\cancel{a^2} = \cancel{a^2}-3a \iff \boxed{a=-1}$$

Vediamo se ce ne sono per $a>3$
$a>0 \Rightarrow \lambda_2 > 3$ dunque vediamo se $\lambda_1 = \lambda_3$

$1 = a - \sqrt{a^2-3a}$ $\qquad \underbrace{\sqrt{a^2-3a}}_{>0} = \underbrace{a-1}_{>0}$

$\cancel{a^2} - 3a = \cancel{a^2} - 2a + 1 \iff a = -1$ assurdo perché $a > 3$.

Prima conclusione

- se $0 < a < 3$ T_a non è diagonalizzabile perché non ha 3 autovalori reali

- se $a < 0$, $a \neq -1$ o $a > 3$ ci sono 3 autovalori distinti e T_a è diagonalizzabile.

Resta il caso di un autovalore doppio, cioè

$a = -1$ autov. doppio $1 = \lambda_1 = \lambda_2$

$a = 0$ " " $0 = \lambda_2 = \lambda_3$

$a = 3$ " " $3 = \lambda_2 = \lambda_3$

Dobbiamo solo calcolare

$$rk([T_{-1}] - I) = rk \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$m_a(1) = m_g(1) \Rightarrow T_{-1}$ è diagonalizzabile

$$rk(T_0) = rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$m_a(0) > m_g(0) \Rightarrow T_0$ non è diagonalizzabile

$$rk([T_3] - 3I) = rk \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow T_3 \text{ non è diag.}$$

Esercizio 4

a) Dalla Teoria sappiamo che $\dim V = 4$.
È chiaro che W è un ssp vett di V
(non è richiesta la dimostrazione) in
quanto chiaramente . $0 \in W$,

- se $p, q \in W$ $\quad p+q \in V$
$$(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0$$
$$\Rightarrow p+q \in W$$

- Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $p \in W \Rightarrow \lambda p \in V$ e $(\lambda p)(0) = \lambda\, p(0) = 0$
$$\Rightarrow \lambda p \in W.$$

Sia $p \in V \Rightarrow p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\Rightarrow W = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a+b+c+d = 0\}$$

Mediante l'isomorfismo di $V \to \mathbb{K}^4$
che ~~passa~~ associa ad un elemento le sue coord
rispetto alla base $\{x^3, x^2, x, 1\}$ si ha che
$W \cong \{(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4 \mid a+b+c+d = 0\} = \Delta_A$
Dove $A = (1 \; 1 \; 1 \; 1)$ è una matrice
1×4 con $rk\, A = 1$

$$\Rightarrow \underline{\dim W} = \dim \Delta_A = 4 - rk A = \underline{3}$$

b) Per $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/_{13\mathbb{Z}}$ si ha $W \cong \left(\mathbb{Z}/_{13\mathbb{Z}}\right)^3$
(in quanto ogni sp. vett di
dim n su $\mathbb{K}$ è isomorfo a $\mathbb{K}^n$)

$$\Rightarrow \# W = \# \left(\mathbb{Z}/_{13\mathbb{Z}}\right)^3 = 13^3$$