4^o **Compitino di MD**

A.A. 2012/13 – 28 maggio 2013

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1. Fattorizzare il polinomio

$$x^6 - 3$$

come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{Z}_2[x]$.

Esercizio 2. Sia $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo che, rispetto alla base standard, è rappresentato dalla matrice

$$[T_a] = \begin{pmatrix} 0 & 2a & a \\ 0 & a+2 & 0 \\ a & -2 & a^2-1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali l'endomorfismo T_a è diagonalizzabile.

b) Determinare i valori del parametro reale a per i quali l'endomorfismo T_a è invertibile.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ sul campo $\mathbb{R}$. Sia $\mathcal{S} = \{M \in V \mid M = M^t\}$ il sottospazio delle matrici simmetriche di V e $\mathcal{A} = \{M \in V \mid M = -M^t\}$ il sottospazio delle matrici antisimmetriche.

a) Dimostrare che $V = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

b) Sia $\varphi : V \to V$ l'applicazione lineare definita da

$$\varphi(M) = M + M^t.$$

Dire se φ è diagonalizzabile e se lo è determinare una base di autovettori.