

Compito di MD
A.A. 2013/14 – 5 novembre 2013

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \leq \frac{4}{3} - \frac{1}{3n}$$

Esercizio 2. a) Quante sono le funzioni da $\{1, \dots, 20\}$ a $\{1, \dots, 20\}$ che assumono almeno un valore maggiore di 11?

b) Quante sono quelle che assumono esattamente un valore maggiore di 11?

c) Quanti sono i sottoinsiemi di $\{1, \dots, 20\}$ che contengono esattamente tre numeri pari?

Esercizio 3. Sia \mathbf{F} un campo e consideriamo l'applicazione $T : \mathbf{F}^3 \rightarrow \mathbf{F}^3$ che nella base standard è data da:

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Trovare $\text{Ker } T$ e $\text{Imm } T$ quando $\mathbf{F} = \mathbb{Z}_2$.

b) Trovare $\text{Ker } T$ e $\text{Imm } T$ quando $\mathbf{F} = \mathbb{Z}_3$.

c) In quali dei casi precedenti è vero che $\text{Ker } T$ e $\text{Imm } T$ sono in somma diretta ?

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare $F_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base standard, ha matrice:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità di F_a .