

Compito di MD

A.A. 2012/13 – 6 settembre 2013

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1.

Dire per quali numeri naturali n è vera la disuguaglianza

$$2^{2^n} \geq 2^2(n!)$$

Esercizio 2. Trovare tutte le soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 18x \equiv 232 \pmod{34} \\ 220x \equiv 80 \pmod{30} \end{cases}$$

È vero o falso che per ogni numero $n \in \mathbb{Z}$ esiste una soluzione \bar{x} del sistema tale che $\bar{x} \equiv n \pmod{5}$?

Esercizio 3. Sia $T_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo che, rispetto alla base canonica, è rappresentato dalla matrice

$$[T_a] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo T_a è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia K un campo e sia $V = K[x]_{\leq 3}$. Consideriamo l'applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ definita da:

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a + b)x^3 + (b + c)x^2 + (c + d)x + (a - d)$$

- Calcolare una base di $\ker f$, $\text{Imm } f$ e $\text{Ker } f \cap \text{Imm } f$ nel caso in cui $K = \mathbb{R}$.
- Calcolare una base di $\ker f$, $\text{Imm } f$ e $\text{Ker } f \cap \text{Imm } f$ nel caso in cui $K = \mathbb{Z}_2$.