Compito di MD
13 febbraio 2014

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<ins>IMPORTANTE:</ins> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. I testi degli esercizi sono su fogli separati su cui vanno scritte le rispettive soluzioni: **scrivere il nome su ciascun foglio**. Mettere entro un riquadro bene evidenziato la soluzione, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1. Sia S l'insieme delle successioni $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di lunghezza n in cui ogni a_i è uguale a 0, 1 o 2.

1. Quante sono le successioni in S?
2. Quante sono le successioni in S con almeno una delle cifre uguali ad 1?
3. Quante sono le successioni in S la cui somma delle cifre è 5?

Soluzione: 1) Per ogni a_i ci sono 3 scelte, quindi S ha cardinalità 3^n.

2) Basta sottrarre dal totale delle successioni quelle in cui non compaiono degli 1. Il totale è 3^n. Quelle senza 1 sono 2^n. La risposta è dunque $3^n - 2^n$.

3) Supponiamo $n \geq 5$. Se la somma delle cifre è 5 ci possono essere due 2 e un 1, oppure un 2 e tre 1, oppure cinque 1, mentre le cifre rimanenti devono essere tutte uguali a 0. Consideriamo separatamente questi tre tipi di successioni.

Per le successioni del primo tipo abbiamo n possibili posizioni per l'1 e una volta scelta la posizione dell'1 abbiamo $\binom{n-1}{2}$ possibili posizioni per i due 2. Quindi in tutto ci sono $n\binom{n-1}{2}$ successioni del primo tipo. (Alternativamente avremmo potuto scegliere prima la posizione dei 2 e poi quella dell'1 ottenendo la formula equivalente $\binom{n}{2}(n-2)$.)

Per il secondo tipo ragioniamo analogamente ottendendo $n\binom{n-1}{3}$ possibili successioni.

Per il terzo tipo basta calcolare il numero delle possibili posizioni per i cinque 1, che è $\binom{n}{5}$.

Il totale generale si ottiene sommando il numero di successioni di ciascun tipo:

$$n\binom{n-1}{2} + n\binom{n-1}{3} + \binom{n}{5}.$$

I casi in cui $n \leq 5$ si ottengono rimpiazzando alcuni coefficienti binomiali con zero (quelli in cui il numero in basso è maggiore di quello in alto). $\square$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 2. Consideriamo il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 5x & \equiv & a & \pmod{42} \\ 6x & \equiv & 1 & \pmod{35} \end{cases}$$

a) Trovare tutte le soluzioni del sistema per $a = 107$.
b) Determinare i valori del parametro intero a per cui il sistema è risolubile.

Soluzione: Con l'algoritmo di Bezout trovo che l'inverso di 5 modulo 42 è 17 e l'inverso di 6 modulo 35 è 6. Moltiplicando la prima congruenza per 17 e la seconda per 6 ottengo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x & \equiv & 17a & \pmod{42} \\ x & \equiv & 6 & \pmod{35} \end{cases}$$

Il massimo comun divisore tra 42 e 35 è 7. Se due numeri sono congrui modulo 42 lo sono anche modulo 7 e similmente se sono congrui modulo 35 lo sono anche modulo 7. Quindi se x esiste deve essere congruente sia a $17a$ sia a 6 modulo 7 e pertanto $17a$ deve necessariamente essere congruente a 6 modulo 7 affinchè esista una soluzione. Dalla teoria sappiamo che tale condizione è anche sufficiente. Il sistema ha dunque soluzione se e solo se $17a \equiv 6 \bmod 7$ ovvero $3a \equiv 6 \bmod 7$. Possiamo semplificare ulteriormente questa condizione dividendo per 3 (lo possiamo fare in quanto 3 è primo con 7) ottenendo $a \equiv 2 \bmod 7$.

La risposta alla domanda b) è dunque: *il sistema è risolubile se e solo se* $a \equiv 2 \bmod 7$.

Per la domanda a) osserviamo innanzitutto che 107 è effettivamente congruo a 2 modulo 7 e dunque le soluzioni esistono. Il minimo comune multiplo dei moduli è $210 = \mathrm{mcm}(42, 35)$, come si vede facilmente dalla fattorizzazione $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $35 = 5 \cdot 7$, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ne segue che se x_0 è una soluzione particolare del sistema le altre si ottengono aggiungendo ad essa un multiplo di 210.

Per trovare una soluzione osserviamo che $17a = 17 \cdot 107 \equiv 13 \bmod 42$. Il sistema da risolvere (con $a = 107$) equivale dunque al seguente:

$$\begin{cases} x & \equiv & 13 & \pmod{42} \\ x & \equiv & 6 & \pmod{35} \end{cases}$$

Le x che verificano la prima congruenza sono tutte e sole quelle della forma $x = 13 + 42k$. Sostituendo tali valori nella seconda otteniamo $13 + 42k \equiv 6 \bmod 35$, che equivale a $42k \equiv -7 \bmod 35$. Dividendo tutto per 7 otteneniamo la condizione equivalente $6k \equiv -1 \bmod 5$, cioè $k \equiv 4 \bmod 5$. Le soluzioni x del sistema si ottengono sostituendo tali valori di k nell'espressione $x = 13 + 42k$. I valori di k che ci interessano sono della forma $k = 4 + 5t$ e sostituendo otteniamo $x = 13 + 42(4 + 5t) = 13 + 42 \cdot 4 + 42 \cdot 5t$. Il sistema equivale dunque alla singola congruenza $x \equiv 13 + 42 \cdot 4 \bmod 42 \cdot 5$, che possiamo riscrivere come

$$x \equiv 181 \bmod 210.$$

Una soluzione particolare è 181 e le altre sono della forma $181 + m210$. $\square$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 3.
Determinare il numero di soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale a

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 4x+y+2z=6 \\ x+2y+(a^2-19)z=a \end{cases}$$

Soluzione: La matrice del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & (a^2-19) & a \end{array}\right).$$

Sottraendo dalla terza riga la prima riga e poi sottraendo dalla seconda riga la prima riga moltiplicata per 4 otteniamo la matrice a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & (a^2-16) & a-4 \end{array}\right).$$

Osserviamo che $a^2-16=(a-4)(a+4)$ ha come radici ± 4.

Se $a \neq \pm 4$ il termine a^2-16 è diverso da zero e abbiamo una sola soluzione.

Se $a=-4$ la terza equazione del sistema ridotto a scala diventa $0z=-8$ e non c'è alcuna soluzione.

Se $a=4$ la terza equazione del sistema ridotto a scala diventa $0z=0$, che è soddisfatta da qualunque valore di z. Il sistema in questo caso ha infinite soluzioni. $\square$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una trasformazione lineare che manda il vettore $(0, 0, 1)$ in $(2, 3, 4)$, il vettore $(0, 2, 0)$ in $(6, 8, 10)$ e il vettore $(1, 0, 0)$ in $(10, 14, 18)$.
a) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di f.
b) Calcolare l'immagine del vettore $(1, 1, 1)$.

Soluzione: Rispondiamo prima al punto b). Siccome f è lineare, se manda un vettore in un altro deve mandare la metà di quel vettore nella metà dell'altro. In particolare visto che il vettore $(0, 2, 0)$ va in $(6, 8, 10)$, il vettore $(0, 1, 0)$ deve andare in $(3, 4, 5)$. Sappiamo dunque dove f manda i vettori della base standard $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ e le loro rispettive immagini ci forniscono le colonne della matrice A di f rispetto alla base standard:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 14 & 4 & 3 \\ 18 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Applicandola al vettore $(1, 1, 1)$ otteniamo

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 3 + 2 \\ 14 + 4 + 3 \\ 18 + 5 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 27 \end{pmatrix}$$

L'immagine di $(1, 1, 1)$ è dunque il vettore $(15, 21, 27)$.

Per il punto a) osserviamo che la somma delle ultime due colonne della matrice A è il vettore colonna $(5, 7, 9)$, che moltiplicato per due fornisce la prima colonna $(10, 14, 18)$ della matrice, che è pertanto linearmente dipendente dalle altre. Il rango della matrice A è dunque al più 2, ma poiché le ultime due colonne sono linearmente indipendenti esso è esattamente due.

In generale la dimensione del nucleo di una applicazione lineare di ottiene dalla formula "dimensione del dominio - dimensione del nucleo = dimensione dell'immagine". Nel nostro caso il dominio ha dimensione 3 e la dimensione dell'immagine è 2 (pari al rango). Dunque la dimensione del nucleo è $3 - 2 = 1$. $\square$