Compito di ALGEBRA
5 novembre 2014

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. I testi degli esercizi sono su fogli separati su cui vanno scritte le rispettive soluzioni: **scrivere il nome su ciascun foglio**. Mettere entro un riquadro bene evidenziato la soluzione, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1. Consideriamo i due seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Data l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L(x, y, z) = (x + y, x + z, x + z)$ trovare una base di Ker L e Im L e scrivere la matrice $[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ associata alla base $\mathcal{C}$ in partenza e alla base $\mathcal{B}$ in arrivo.

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 2.
Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ ed il sottospazio $W = Span\{(1, -1, 2)\}$.
a) Calcolare una base dello spazio $V + W$ e dire se tale somma è diretta.
b) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $ker(f) = V$ e $Im(f) = W$.
c) Mostrare che l'insieme delle applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $V \subseteq ker(f)$ e $Im(f) \subseteq W$ è un sottospazio vettoriale dello spazio di tutte le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ in sé.