

Compito di MD

5 novembre 2014

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. I testi degli esercizi sono su fogli separati su cui vanno scritte le rispettive soluzioni: **scrivere il nome su ciascun foglio**. Mettere entro un riquadro bene evidenziato la soluzione, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1.

Trovare il più piccolo valore $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$, valga

$$\sum_{i=0}^n i^3 \leq \frac{1}{2}n^4.$$

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 2. Sia $\mathbb{N}_{100} = \{1, 2, \dots, 100\}$.

- a) Quanti sono i sottoinsiemi A di 3 elementi di \mathbb{N}_{100} tali che la somma degli elementi di A sia pari?
- b) Quanti sono i sottoinsiemi di \mathbb{N}_{100} che contengono almeno 3 numeri pari?
- c) Quanti sono i sottoinsiemi di \mathbb{N}_{100} che contengono esattamente 3 numeri pari ed esattamente un multiplo di 5 ?
- d) Quante sono le terne ordinate (n, m, u) di elementi di \mathbb{N}_{100} il cui prodotto fa 100?

Esercizio 3. Consideriamo i due seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Data l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $L(x, y, z) = (x + y, x + z, x + z)$ trovare una base di $\text{Ker } L$ e $\text{Im } L$ e scrivere la matrice $[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ associata alla base \mathcal{C} in partenza e alla base \mathcal{B} in arrivo.