Compito di MD
A.A. 2013/14 – 4 Settembre 2014

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni della congruenza $x^{15} \equiv 8 \bmod 15$.

Soluzione: La congruenza equivale al sistema

$$\begin{cases} x^{15} \equiv 8 \bmod 5 \\ x^{15} \equiv 8 \bmod 3. \end{cases}$$

Visto che i moduli sono primi, possiamo applicare il piccolo teorema di Fermat: $x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, se p è primo e $x \not\equiv 0 \bmod p$.

Consideriamo la prima congruenza e osserviamo che le sue soluzioni sono diverse da 0 modulo 5. Moltiplicando per x otteniamo allora la congruenza equivalente $x^{16} \equiv 8x \bmod 5$. Per il piccolo teorema di Fermat $x^{16} = x^{4\cdot 4} \equiv 1 \bmod 5$ e la congruenza diventa $1 \equiv 8x \bmod 5$.

Consideriamo ora una generica soluzione x della seconda congruenza. Possiamo scrivere $x^{15} = x^{2\cdot 7}x$ e siccome per il piccolo teorema di Fermat $x^2 \equiv 1 \bmod 3$, otteniamo $x^{15} \equiv x \bmod 3$. Sostituendo, la congruenza diventa $x \equiv 8 \bmod 3$. In conclusione il sistema equivale a:

$$\begin{cases} 1 \equiv 8x \bmod 5 \\ x \equiv 8 \bmod 3. \end{cases}$$

Risolvendo le due congruenze possiamo riscriverlo nella forma:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 5 \\ x \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

Quest'ultimo sistema equivale a sua volta alla singola congruenza $x \equiv 2 \bmod 15$. Le soluzioni sono dunque gli interi x della forma $x = 2 + 15k$. $\square$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Esercizio 2. Consideriamo matrici 2×2 composte da numeri interi compresi tra 0 e 9 (estremi inclusi).

1. Quante sono le matrici con almeno due numeri uguali?
2. Quante sono le matrici con esattamente due numeri uguali?
3. Quante sono le matrici in cui in ciascuna riga e in ciascuna colonna non vi siano due numeri uguali?

Soluzione: (1) Le matrici cercate sono tutte meno quelle che hanno tutti gli elementi distinti. Poiché ogni entrata della matrice ha 10 possibili valori, la soluzione è $10^4 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

(2) La soluzione è $\binom{4}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ dove il primo fattore conta le scelte per le posizioni in cui posso mettere due numeri uguali.

(3) Ci sono due casi, a seconda che i numeri sulla diagonale principale a_{11}, a_{22} siano uguali o diversi. Nel primo caso ho 10 scelte per il valore sulla diagonale principale e 9^2 scelte per i rimanenti due numeri. In tutto $10 \cdot 9^2$ scelte. Nel secondo caso ho 10 scelte per a_{11}, 9 scelte per a_{22}, e 8^2 scelte per i rimanenti due numeri. In tutto $10 \cdot 9 \cdot 8^2$ scelte. Il numero totale è dunque $10 \cdot 9^2 + 10 \cdot 9 \cdot 8^2$. $\square$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Esercizio 3. Consideriamo il seguente sistema nelle variabili (x, y, z):

$$\begin{cases} (k+2)x + 2ky - z &= 1 \\ x - 2y + kz &= -k \\ y + z &= k \end{cases}$$

a) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ tale sistema ammette una unica soluzione?
b) Ci sono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette infinite soluzioni ? Se ci sono calcolare, per tali k, tutte le soluzioni.

Soluzione: Un sistema $n \times n$ ha soluzione se e solo se la matrice completa del sistema e la matrice incompleta hanno lo stesso rango. Ne ha infinite se questo rango è minore di n, e ne ha una sola quando è n.

Nel nostro caso la matrice completa è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k+2 & 2k & -1 & 1 \\ 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \end{array}\right).$$

Le mosse elementari di riga non alterano né i ranghi né l'insieme delle soluzioni. Spostando la prima riga in fondo e facendo altre mosse elementari di riga, dopo qualche conto ci riduciamo alla matrice a scalini:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & (k+1)(k+5) & (k+1)(-3k+1) \end{array}\right).$$

(a) Il rango della matrice incompleta è 3 se e solo se $k \neq -1 \wedge k \neq -5$. In questo caso il sistema ha un'unica soluzione.

(b) Per $k = -1$ il rango della matrice incompleta e quello della matrice completa sono entrambi uguali a 2 e vi sono infinite soluzioni.

Per $k = -5$ il rango della matrice incompleta è 2 e quello della matrice completa è 3 e non vi sono soluzioni.

(c) Quando $k = -1$ la matrice ridotta è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Per trovare le soluzioni del sistema, possiamo dare alla z un qualsiasi valore λ. La y e la x sono poi determinate: $y = -1-\lambda$; $x = 1+2(-1-\lambda)+\lambda$. $\square$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Esercizio 4. Sia $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.
a) Dire se il vettore $(1, 2, 3)$ appartiene o no a $\mathrm{Im} f$.
b) Consideriamo i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
c) Scrivere la matrice associata all'applicazione lineare f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia in partenza che in arrivo.

Soluzione: (a) Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di f se e solo se è nello span dei vettori colonna della matrice A, e questo avviene se e solo se il rango della matrice A è uguale a quello della matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Riducendo a scalini con il metodo di Gauss si vede che i ranghi sono entrambi uguali a 3 quindi il vettore appartiene all'immagine.

(b) Tre vettori in uno spazio vettoriale di dimensione tre sono una base se e solo se sono linearmente indipendenti. Basta quindi verificare l'indipenza lineare di v_1, v_2, v_3. Scrivendo la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dei vettori colonna e riducendola a scalini si vede che il rango è 3 e pertanto v_1, v_2, v_3 sono indipendenti.

(c) La matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da $B^{-1}AB$ dove B è la matrice di cambiamento dalla base $\mathcal{B}$ alla base standard, la quale è data dalle colonne delle coordinate dei vettori v_1, v_2, v_3 rispetto alla base standard:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare B^{-1} affianchiamo a B la matrice identità di dimensione 3×3:

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Con mosse di riga la possiamo ridurre a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \end{array}\right) = (I|B^{-1})$$

dove a destra della sbarra verticale troviamo i coefficienti della matrice B^{-1}. Una volta calcolata B^{-1} per ottenere la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ dobbiamo moltiplicare tre matrici:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 11 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(va anche bene lasciare il risultato nella forma $B^{-1}AB$ senza effettuare i conti). $\square$