Compito di Matematica Discreta
A.A. 2014/15 – 9 aprile 2015

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

Esercizio 1. Risolvere la seguente congruenza:

$$x^3 \equiv x \pmod{105}.$$

Esercizio 2. Sia X l'insieme dei numeri di 5 cifre che si scrivono usando solo le cifre 1,2,3 (ad esempio 11111, 12312,11212 sono numeri di X).
a) Determinare la cardinalità di X.
b) Quanti tra i numeri dell'insieme X contengono esattamente due cifre distinte?
c) Quanti sono i numeri dell'insieme X che contengono tutte e tre le cifre?

Esercizio 3. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio V generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che V ha dimensione 2 ed estendere $\{v_1, v_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ (cioè trovare v_3, v_4 tali che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$).
b) Esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}\ T = \mathrm{Imm}\ T = V$? Se non esiste spiegare il motivo, se esiste scegliere una base dello spazio $\mathbb{R}^4$ (in partenza e in arrivo) e scrivere una matrice che rappresenta tale applicazione rispetto alla base scelta.

Esercizio 4. Determinare i valori del parametro reale k per i quali la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per tali valori determinare anche una base di autovettori.