

**3° Compitino di MD**  
A.A. 2014/15 – 9 aprile 2015

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: .....

Corso e Aula: .....

**IMPORTANTE:** Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

**Esercizio 1.** Sia  $L : (\mathbb{Z}_7)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^3$  l'applicazione lineare la cui matrice, espressa rispetto alle basi standard, è

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Determinare una base del nucleo di  $L$ .
- Determinare una base dell'immagine di  $L$ .



**Esercizio 2.** Si consideri in  $\mathbb{R}^4$  il sottospazio  $A$  generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Verificare che  $A$  ha dimensione 2 ed estendere  $\{v_1, v_2\}$  ad una base di  $\mathbb{R}^4$  (cioè trovare  $v_3, v_4$  tali che  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  sia una base di  $\mathbb{R}^4$ ).
- b) Esiste una applicazione lineare  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che  $\text{Ker } T = \text{Im } T = A$ ? Se non esiste spiegare il motivo, se esiste scegliere una base dello spazio  $\mathbb{R}^4$  (in partenza e in arrivo) e scrivere una matrice che rappresenta tale applicazione rispetto alla base scelta.



**Esercizio 3.** Sia  $A$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  descritto nell'esercizio precedente. Sia  $B$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  dato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Trovare una base di  $A \cap B$  e una base di  $A + B$ .

