3^o **Compitino di MD - corso B**
A.A. 2014/15 – 9 aprile 2015

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

Esercizio 1. Sia $f : (\mathbb{Z}_7)^4 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ l'applicazione lineare definita da $f(v) = Av$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Determinare una base del nucleo di f.
- Determinare una base dell'immagine di f.

(Visto che le basi sono quelle canoniche, la matrice associata a f è A stessa!)

Riduco A a scala (usando aritmetica mod 7):

$$\begin{array}{c} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ b-3a \\ c-a \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \end{array} \xrightarrow{(-2b')} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \dots$$

Nota: alcuni hanno trovato per esempio $[0 \ 0 \ -7 \ 7]$ nell'ultima riga e hanno diviso per 7 — questo non si può fare perché $7 \equiv 0 \pmod 7$!

$$\dots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Corrisponde a x_3, x_4 variabili libere,

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 - 3x_4 \\ -2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} ; x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_7 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 : x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

cont. →

Quindi $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (sol. speciali)

sono una base di Ker A = Ker f.

Riducendo A a scala abbiamo trovato pivot nelle colonne 1, 2, quindi una base di im A = im f sono le prime due colonne di A (non della matrice ridotta a scala!)

$$\boxed{\text{Base di Ker } f: \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\boxed{\text{Base di im } f: \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

Esercizio 2. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio V generato dai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Verificare che V ha dimensione 2 ed estendere $\{v_1, v_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ (cioè trovare v_3, v_4 tali che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$).
b) Esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che Ker $T =$ Im $T = V$? Se non esiste spiegare il motivo, se esiste scegliere una base dello spazio $\mathbb{R}^4$ (in partenza e in arrivo) e scrivere una matrice che rappresenta tale applicazione rispetto alla base scelta.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot in tutte e due le colonne $\Rightarrow$ v_1, v_2 sono una base di span$\{v_1, v_2\}$ che quindi ha dimensione 2.

Per completare v_1, v_2 a una base di $\mathbb{R}^4$ completo la matrice $[v_1 \; v_2]$ con un insieme di generatori di $\mathbb{R}^4$, la base canonica:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\quad\text{base di } \mathbb{R}^4\quad}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivot nelle colonne 1, 2, 3, 6 $\Rightarrow$ le colonne 1, 2, 3, 6 di B (non della ridotta a scala!) sono una base di $\mathbb{R}^4$:

$$\boxed{\text{Base: } \left\{ v_1, v_2, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

b) È più semplice cercarlo nella base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Dev'essere $T(v_1) = T(v_2) = 0$, e

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{span}\left(T(v_1), T(v_2), T(v_3), T(v_4)\right) = \operatorname{Span}\left(T(v_3), T(v_4)\right) =$$

$$= \operatorname{span}\left(v_1, v_2\right).$$

La scelta più semplice è $T(v_3) = v_1$, $T(v_4) = v_2$.

La matrice associata (nella base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$) è

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) & T(v_4) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}.$$

Per questa applicazione lineare vale sicuramente

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}(v_1, v_2), \text{ e}$$

$$\operatorname{Ker} T \supseteq \operatorname{span}(v_1, v_2) \supseteq \{v_1, v_2\}.$$

Ker T non può essere più grande di così perché dev'essere

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

Esercizio 3. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto nell'esercizio precedente. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad &= 0. \end{cases}$$

Trovare una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.

- $V \cap W$: innanzitutto trovo equazioni per V:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 3 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in V$ se e solo se non c'è un pivot nella terza colonna, quindi $x_3 - x_1 = x_4 = 0$

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_3 - x_1 = x_4 = 0 \right\} = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$V \cap W$ sono i vettori che soddisfano le equazioni di V e W:

$$V \cap W = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}V \\ \\ \}W \end{matrix}$$

Trovo il Ker riducendo a scala:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Variabile libera: x_3

$$V \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\boxed{\text{Base } V \cap W : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

- $V+W$: innanzitutto trovo generatori per W:

$$W = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Variabili libere x_3, x_4. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_3+2x_4 \\ -x_3-4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

$$V+W = \text{Im} \begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad 1}^{\text{generatori } V} & \overbrace{1 \quad 2}^{\text{generatori } W} \\ 1 \quad 3 & -1 \quad -4 \\ 1 \quad 1 & 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 & 0 \quad 1 \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

$\downarrow$ Elim. di Gauss

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot sulle colonne 1,2,4

Una base di $V+W$ sono le colonne 1,2,4 della matrice in $(*)$

$$\text{base } V+W : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$