Compito di Algebra
A.A. 2014/15 – 9 aprile 2015

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio V generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che V ha dimensione 2 ed estendere $\{v_1, v_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ (cioè trovare v_3, v_4 tali che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$).
b) Esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che Ker $T =$ Imm $T = V$? Se non esiste spiegare il motivo, se esiste scegliere una base dello spazio $\mathbb{R}^4$ (in partenza e in arrivo) e scrivere una matrice che rappresenta tale applicazione rispetto alla base scelta.

Esercizio 2. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto nell'esercizio precedente. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \end{cases}$$

Trovare una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.

Esercizio 3. Determinare i valori del parametro reale k per i quali la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile. Per tali valori determinare anche una base di autovettori.