Compito di Matematica Discreta
A.A. 2014/15 – 9 aprile 2015

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

Esercizio 1. Risolvere la seguente congruenza:

$$x^3 \equiv x \pmod{105}.$$

$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ – Per il Teorema cinese del resto, la congruenza assegnata è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^3 \equiv x \ (3) \\ x^3 \equiv x \ (5) \\ x^3 \equiv x \ 7 \end{cases}$$

$x^3 \equiv x \ (3)$ è sempre verificata per il piccolo T. di Fermat

$$\Updownarrow \quad \begin{cases} x(x^2-1) = x(x-1)(x+1) \equiv 0 \ (5) \\ x(x-1)(x+1) \equiv 0 \ (7) \end{cases}$$

$x(x-1)(x+1) \equiv 0 \ (5) \iff x \equiv 0, \ x \equiv 1, \ x \equiv -1 \ (5)$

Infatti 5 è primo e in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ che è un campo vale il principio di annullamento del prodotto. Analogamente mod 7 le soluzioni sono $x \equiv 0, 1, -1 \ (7)$. Abbiamo quindi 9 sistemi da risolvere e ciascuno ha sol unica mod 35

$$\begin{cases} x \equiv a \ (5) \\ x \equiv b \ (7) \end{cases} \quad \text{con } a \in \{0, 1, \\ b \in \{0, 1,$$

$\Rightarrow$ 9 sol mod 35.

Cerchiamo le soluzioni
Consideriamo i sistemi

1) $\begin{cases} x \equiv 1 & (5) \\ x \equiv 0 & (7) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \equiv 0 & (5) \\ x \equiv 1 & (7) \end{cases}$

(1) ha soluzione $x_1 \equiv 21 \ (35)$
(2) ha soluzioni $x_2 \equiv 15 \ (35)$

(Si possono trovare facendo il calcolo, o "a occhio" con l'osservazione che essendo le sol unica mod. quelle trovate è l'unica soluzione)

Le soluzioni dei 9 sistemi trovati sono quindi

$$x \equiv a x_1 + b x_2 \quad (35)$$

con $a \in \{\bar{0}, \bar{1}, -\bar{1}\}$ e $b \in \{\bar{0}, \bar{1}, -1\}$

Esplicitando i calcoli si ha

$x \equiv 0 \ (35)$
$x \equiv 21 \ (35)$
$x \equiv -21 \ (35)$
$x \equiv 15 \ (35)$
$x \equiv 1 \ (35)$
$x \equiv -6 \ (35)$
$x \equiv -15 \ (35$
$x \equiv 6 \ (35)$
$x \equiv -1 \ (35)$

Esercizio 2. Sia X l'insieme dei numeri di 5 cifre che si scrivono usando solo le cifre 1,2,3 (ad esempio 11111, 12312,11212 sono numeri di X).
a) Determinare la cardinalità di X.
b) Quanti tra i numeri dell'insieme X contengono esattamente due cifre distinte?
c) Quanti sono i numeri dell'insieme X che contengono tutte e tre le cifre?

a) Per ognuna delle 5 cifre ho 3 possibili scelte

$\Rightarrow 3^5$ numeri

b) Ho 3 modi per scegliere le 2 cifre $\{1,2\}$; $\{1,3\}$; $\{2,3\}$
Per ognuna di tali ~~cifre~~ scelte devo contare i numeri di 5 cifre che posso fare usando le entrambe
Questi sono $2^5 - 2$
numeri con un'unica cifra ripetuta

In totale $3(2^5-2) = 90$

c) $\#\{n \in X \mid n \text{ contiene tutte e 3 le cifre}\} =$
$\# X - \#\{n \in X \mid n \text{ contiene 1 sola cifra}\} -$
$- \#\{n \in X \mid n \text{ contiene esattamente 2 cifre}\} =$
$= 3^5 - 3 - 90 = 150$

Esercizio 3. Determinare i valori del parametro reale k per i quali la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per tali valori determinare anche una base di autovettori.

Polinomio caratteristico

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & k^2 \\ 0 & k-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (k-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - k^2\right) =$$

$$= -(\lambda - k)(\lambda-(1-k))(\lambda-(1+k$$

Autovalori $\lambda_1 = k$ $\lambda_2 = 1-k$ $\lambda_3 = 1+k$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 \neq \lambda_3$ $\lambda_2 \neq \lambda_3$ ci sono 3 autovalo distinti $\Rightarrow M$ è diagonalizzabile.

Studiamo le coincidenze degli autovalori

$\lambda_1 = \lambda_2 \iff k = 1-k \iff k = \frac{1}{2}$

In questo caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ha molt. alg $= 2$

Calcolo la m. geometrica

$$M_{1/2} - \frac{1}{2} Id = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 1$$

$\dim \ker M_{1/2} - \frac{1}{2} Id = 2 \rightarrow$ base autospazio

$x + \frac{1}{2}z = 0$ $x = -\frac{1}{2}z$

$$\begin{pmatrix} -1/2\, z \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{base} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

$\lambda_1 = \lambda_3$ MAI

$\lambda_2 = \lambda_3 \iff k = 0$ in questo caso $\lambda = 1$ è autoval. di m. algebrica 2

Molt geometrica di $\lambda = 1$ $(k=0)$

$$M_0 - I\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

~~dim~~ $rk = 2$ ~~dim~~

molt geometrica $= 1$

$\rightarrow$ M non è diag per $k=0$

Conclusione: Per $k \neq 0, \frac{1}{2}$ ci sono 3 autovalori distinti

$\Rightarrow$ M è diag e la sua forma diag è

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}$$

Cerco una base di autovettori per $k \neq 0, \frac{1}{2}$

Base V_k $\quad M - kI = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$

$\ker M - kI \quad \begin{cases} (1-k)x + k^2 z = 0 \\ x + (1-k)z = 0 \end{cases} \underset{k \neq \frac{1}{2}}{\Rightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$ base $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Base $V_{1-k} = \ker M - (1-k)I$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & k^2 \\ 0 & -1+2k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \underset{k \neq 0}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & -1+2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x + kz = 0 \\ (-1+2k)y = 0 \end{cases}$$

$k \neq \frac{1}{2}$ $\begin{cases} x = -kz \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$ base $\begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

base $V_{1+k} = \ker M - (1+k)I = \begin{pmatrix} -k & 0 & k^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x - kz = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = kz \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

BASE AUTOVETTORI

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$k = 1/2$ Base autovett $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \end{pmatrix} \right.$ — Per $k=0$ non è