

Compito di MD
10 febbraio 2015

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni intere del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x^2 \equiv x \pmod{15} \\ 4x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 2. a) Calcolare il numero di coppie (A, B) di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ tali che $A \cap B = \{1\}$.

b) Calcolare il numero di coppie (A, B) di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ tali che $A \cup B = \{1, \dots, n\}$.

c) Calcolare il numero di funzioni $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 20\}$ tali che $f(x) < x + 2 \forall x \leq 8$.

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 3. Si considerino in \mathbb{R}^4 i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- a) Trovare una base di $U + W$ e una base di $U \cap W$.
- b) Esiste un sottospazio Z di \mathbb{R}^4 tale che $U \oplus Z = W \oplus Z = \mathbb{R}^4$? In caso di risposta affermativa determinare tale sottospazio, in caso di risposta negativa dimostrare che un tale sottospazio non esiste.

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 4.

Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 3 & 12 & 9 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Dire se T è diagonalizzabile e, se lo è, trovare una base fatta da autovettori.