Compito di MD
10 febbraio 2015

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni intere del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x^2 \equiv x \pmod{15} \\ 4x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

$x^2 \equiv x \ (15) \iff \begin{cases} x^2 - x = x(x-1) \equiv 0 \ (3) \\ x^2 - x \equiv x(x-1) \equiv 0 \ (5) \end{cases}$ poiché 3 e 5 sono p

modulo 3 e modulo 5 vale il principio di annull mento del prodotto, quindi si ottiene

$\begin{cases} x \equiv 0 \vee x \equiv 1 \ (3) \\ x \equiv 0 \vee x \equiv 1 \ (5) \end{cases}$ Risolvendo i 4 sistemi si ha

$\begin{cases} x \equiv 0 \ (3) \\ x \equiv 0 \ (5) \end{cases} \iff x \equiv 0 \ (15)$ $\begin{cases} x \equiv 0 \ (3) \\ x \equiv 1 \ (5) \end{cases} \iff x \equiv 6 \ (15)$

$\begin{cases} x \equiv 1 \ (3) \\ x \equiv 0 \ (5) \end{cases} \iff x \equiv 10 \ (15)$ $\begin{cases} x \equiv 1 \ (3) \\ x \equiv 1 \ (5) \end{cases} \iff x \equiv 1 \ (15)$

Dobbiamo quindi risolvere

$\begin{cases} x \equiv a \ (15) \\ 4x \equiv 2 \ (7) \end{cases}$ per $a = 0, 1, 6, 10$ $\begin{cases} x \equiv a \ (15) \\ x \equiv 4 \ (7) \end{cases}$

$a + 15k \equiv 4 \ (7)$ $k \equiv 4 - a \ (7)$ $x \equiv a + 15(4-a) \ (1$

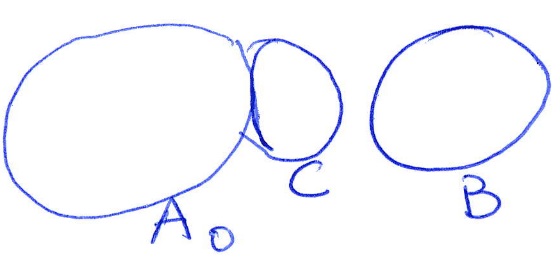
Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 2. a) Calcolare il numero di coppie (A, B) di sottoinsiemi di $\{1, ..., n\}$ tali che $A \cap B = \{1\}$.
b) Calcolare il numero di coppie (A, B) di sottoinsiemi di $\{1, ..., n\}$ tali che $A \cup B = \{1, ..., n\}$.
c) Calcolare il numero di funzioni $f : \{1, ..., 10\} \to \{1, ..., 20\}$ tali che $f(x) < x + 2\ \forall x \leq 8$.

a) Siano $C = A \cap B$ $A_0 = A \setminus C$ $B_0 = B \setminus C$
Sappiamo che $C = \{1\}$ quindi gli altri $n-1$ el (cioè $2, 3, \dots, n$) vanno messi in A_0 in B_0 o in nessuno dei due.
Per ognuno ci sono quindi ~~n~~ 3 possibilità
$\Rightarrow 3^{n-1}$

b) Di nuovo siano $C = A \cap B$ $A_0 = A \setminus C$ $B_0 = B \setminus$



Si tratta di distribuire gli n elementi in A_0, B_0, C e ognuno deve andare in uno solo di questi insiemi $\forall i \in \{1, \dots, n\}$
ho quindi 3 possibilità $\Rightarrow$ in totale $\boxed{3^n}$

c) $f\{1, \dots, 10\} \to \{1, \dots, 20\}$ $f(x) < x+2\ \forall x \leq 8$
Per $x = 1$, $f(1) < 3 \to 2$ possibilità
$x = 2$ $f(2) < 4 \to 3$ poss. . . . $f(8) < 10$ 9 poss
$f(9)$ è 20 poss $f(10)$ 20 possibilità $\to$ in totale
$20^2 \cdot 9!$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > \quad \text{e} \quad W = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} >$$

a) Trovare una base di $U + W$ e una base di $U \cap W$.
b) Esiste un sottospazio Z di $\mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus Z = W \oplus Z = \mathbb{R}^4$? In caso di risposta affermativa determinare tale sottospazio, in caso di risposta negativa dimostrare che un tale sottospazio non esiste.

Sappiamo che, dato $\mathcal{G}_U$ ~~base di~~ l'insieme di ge
per U e $\mathcal{G}_W$ insieme di generatori di W
$\Rightarrow$ $\mathcal{G}_U \cup \mathcal{G}_W$ è un insieme di gen per $U+W$
Da questo possiamo estrarre una base con il metodo degli scarti successivi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i pivot sono nelle colonne 1, 2 e 4
$\Rightarrow$ base di $U+W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right.$

Dal calcolo si vede anche che $\dim U = 2$ e
$\dim W = 2$ infatti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono lin indip
perchè sono parte di una base e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
sono indip perchè $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ -

Da questo segue che $\dim W \cap U = \dim U + \dim W - \dim U$
$= 1$

Si vede che $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \in W \cap U$ (è chiaro che è in W e

inoltre $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ e quindi è in U).

dato ~~il~~ che $\dim W + W = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ è base di $W \cap U$

b) Completando a base di $\mathbb{R}^4$ la base di U otteniamo che i vettori aggiunti generano un ssp. complementare. ~~La ricerca~~
La stessa cosa vale per W. Possiamo trovare un ssp Z che ~~sia~~ complementare di entrambi perché basta completare a base ~~di~~ di $\mathbb{R}^4$ una base di U ~~entrambi~~ con vettori il cui generato non intersechi W.

Ad esempio $Z = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

ha chiaramente dim 2

$\Rightarrow U + Z = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

ha dim 4 perché $\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&-1&0&1\\1&1&0&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&1&-1\\0&0&-1&0\\0&2&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&1&-1\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

e così $W + Z = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ ha dim 4

$\Rightarrow$ ~~$U \oplus Z$~~ $U \cap Z = \{0\}$ $W \cap Z = \{0\}$ e $U \oplus Z = W \oplus Z =$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 4.
Sia $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 9\\ 3 & 12 & 9\\ 3 & 6 & 15\end{pmatrix}$$

Dire se T è diagonalizzabile e, se lo è, trovare una base fatta da autovettori.

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 9\\ 3 & 12 & 9\\ 3 & 6 & 15\end{pmatrix}=3\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}}_{B}=3B$$

A è diagonalizzabile $\iff$ B è diagonalizzabile

Inoltre λ autovalore di B $\iff$ 3λ è autovalore di A e v è autovettore di B $\iff$ v è autovettore di A.

Lavoriamo quindi con la matrice B.

$$p_B(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 3\\ 1 & 4-\lambda & 3\\ 1 & 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda)+6+6-3(4-\lambda)-6(3-\lambda)-2(5-$$

$$=(\lambda-2)^2(8-\lambda).$$

gli autovalori di B sono $\lambda=2$ di molt alg $=2$
$\lambda=8$ " " " $=1$

dim Ker $B-2I$ $\quad B-2I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ rk $=1$ dim ker $=2$

$\Rightarrow$ $\lambda=2$ ha molt geometrica 2 $\rightarrow$ B è diagonalizzabile

Calcolo base Ker $B-2I$ $\quad x+2y+3z=0$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} x = -2y - 3z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcolo base ker $B - 8I$ = $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 12 & -1 \end{pmatrix}$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & \end{pmatrix}} \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dim ker $B - 8I = 1$ ← lo sapevamo già perché

$1 \leq$ molt geom $\leq$ molt alg $= 1$

e una base si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -y + z = 0 \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3z - 2y = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \qquad \text{base } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base di autovettori per $B = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathcal{B}$

Rispetto a tale base si ha che l'applic lineare ha matrice associata

$$\mathcal{B}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 3. Fattorizzare il polinomio $x^6 - 4$ in $\mathbb{Q}[x]$ e in $\mathbb{Z}_5[x]$.

Quanti sono i fattori irriducibili distinti nella fattorizzazione di $x^6 - 4$ in $\mathbb{R}[x]$?

$x^6 - 4 = (x^3-2)(x^3+2)$ in $\mathbb{Q}[x]$

I fattori trovati sono irriducibili perché sono di Eisenstein rispetto a $p=2$.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$ controlliamo la riducibilità / irriducibilità di x^3-2 e x^3+2 in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$

Poiché tali pol hanno grado 3 sono riducibili $\Leftrightarrow$ hanno radici. Per tentativi trovo che 3 radice di x^3-2 e

$(x^3-2)=(x-3)(x^2+3x+4)$ irrid perché non

$\Delta = 9+4\cdot 4 = 1\cancel{3} = 3$ non è $\square$ mod 5

e $(x^3+2) = (x+2)(x^2-2x+4)$ irriducibile perché

$\Delta = \frac{4}{4} - 4 = -3 = 2$ non è $\square$ mod 5

$x^6-4 = (x-3)(x-2)(x^2+3x-1)(x^2+2x+4)$ fatt in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$

In $\mathbb{R}[x]$ si ha

$x^6-4 = (x^3-2)(x^3+2) = (x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2^2}) \cdot (x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2^2})$

e i fattori di 2° grado sono irrid perché hanno $\Delta <$