

## Compito di Algebra

10 febbraio 2015

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

**Esercizio 1.** Si considerino in  $\mathbb{R}^4$  i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Trovare una base di  $U + W$  e una base di  $U \cap W$ .
- Esiste un sottospazio  $Z$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che  $U \oplus Z = W \oplus Z = \mathbb{R}^4$ ? In caso di risposta affermativa determinare tale sottospazio, in caso di risposta negativa dimostrare che un tale sottospazio non esiste.

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

**Esercizio 2.**

Sia  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo la cui matrice rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 3 & 12 & 9 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Dire se  $T$  è diagonalizzabile e, se lo è, trovare una base fatta da autovettori.

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

**Esercizio 3.** Fattorizzare il polinomio  $x^6 - 4$  in  $\mathbb{Q}[x]$  e in  $\mathbb{Z}_5[x]$ .

Quanti sono i fattori irriducibili distinti nella fattorizzazione di  $x^6 - 4$  in  $\mathbb{R}[x]$ ?