Compito di MD

A.A. 2013/14 – 15 gennaio 2015

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1.

a) Risolvere la seguente congruenza $59x \equiv 42 \quad (36)$.

b) Determinare i valori di $a \in \mathbb{Z}$ per i quali il seguente sistema ha soluzione

$$\begin{cases} 59x \equiv 42 \quad (36) \\ 55x \equiv a \quad (32) \end{cases}$$

a) l'eq $59x \equiv 42 \ (36)$ è ~~sempre~~ risolubile perché $(59, 36) = 1$ ed è equivalente a

$$23x \equiv 42 \equiv 6 \ (36)$$

Cerco l'inverso di 23 con l'Alg di Euclide

$$\left.\begin{aligned} 36 &= 1 \cdot 23 + 13 \\ 23 &= 1 \cdot 13 + 10 \\ 13 &= 1 \cdot 10 + 3 \\ 10 &= 3 \cdot 3 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 1 &= 10 - 3 \cdot 3 = 10 - 3(13 - 10) = \\ &= -3 \cdot 13 + 4 \cdot 10 = \\ &= -3 \cdot 13 + 4(23 - 13) = \\ &= 4 \cdot 23 - 7 \cdot 13 = 4 \cdot 23 - 7(36 - 23) \end{aligned}$$

$$1 = -7 \cdot 36 + 11 \cdot 23$$

$\Rightarrow 23 \cdot 11 \equiv 1 \quad (36)$ cioè $\overline{11}$ è l'inverso di $\overline{23}$ mod 36.

$$\Rightarrow \quad 11 \cdot 23x = 6 \cdot 11 \quad (36)$$

$$x \equiv 66 \equiv 30 \quad (36)$$

b) Il sist è quindi

$$\begin{cases} x \equiv 30 \equiv -6 & (36) \\ 55x \equiv a & (32) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6 + 36t \\ -9x \equiv a \quad (32) \end{cases}$$

$-9(-6+36t) \equiv a \quad (32)$

$54 - 9 \cdot 4t \equiv a \quad (32)$

$a \equiv -10 - 4t \quad (32)$

$a \equiv -10 \quad (4)$

$a \equiv 2 \quad (4)$

<u>2° METODO</u>

$$\begin{cases} x \equiv -6 & (36) \\ -9x \equiv a & (32) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv -6 & (36) \\ 7 \cdot (-9)x \equiv 7a & (32) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -6 & (36) \\ x \equiv 7a & (32) \end{cases}$$ ha soluzione se e solo se $(36, 32) = 4 \mid -6 - 7a$

$\Leftrightarrow \quad -6 - 7a \equiv 0 \quad (4) \Leftrightarrow a = 2 \quad (4)$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

Esercizio 2. Sia X l'insieme dei numeri palindromi (ovvero tali che se si leggono da destra a sinistra si ottiene sempre lo stesso numero, tipo 1845481) n tali che $10^6 \leq n < 10^7$.

1. Di quanti elementi è composto l'insieme X?
2. Quanti sono i numeri pari che appartengono a X?
3. Quanti numeri dell'insieme X sono divisibili per 3?

a) I numeri $n \in X$ sono quelli del tipo

$n = abcdcba$

con $a \in \{1, 2, .., 9\}$ $b, c, d \in \{0, 1, .., 9\}$

quindi ci sono 9 possibili valori per a e 10 per b, c, d

$\Rightarrow \#X = 9 \cdot 10^3$

b) $n \in X$ è pari $\Leftrightarrow$ a è pari cioè $a \in \{2, 4, 6, 8\}$

$\Rightarrow \#\{n \in X \mid n \text{ è pari}\} = 4 \cdot 10^3$

c) $n \in X$ è div per 3 $\Leftrightarrow$ la somma delle ~~sue~~ cifre è divisibile per 3 $\Leftrightarrow$

$a+b+c+d+c+b+a \equiv 0 \ (3) \Leftrightarrow$

$2a+2b+2c+d \equiv 0 \ (3) \Leftrightarrow$

$a \equiv 2b+2c+d \ (3)$. Questo vuol dire che se scelgo liberamente b, c, d (ognuno in 10 modi) ~~se~~ ~~posso~~

a deve necessariamente essere nella classe di $2b+2c+d$ modulo 3.

Questa classe $[2b+2c+d]_3$ può essere $[0]_3$, $[1]_3$, $[2]_3$ e in tutti e 3 casi ci sono 3 valori di $a \in \{1, 2, \dots 9\}$

~~che danno~~

$$[2b+2c+d]_3 = [0]_3 \Rightarrow a = 3, 6, 9$$

$$[2b+2c+d]_3 = [1]_3 \Rightarrow a = 1, 4, 7$$

$$[2b+2c+d]_3 = [2]_3 \Rightarrow a = 2, 5, 8$$

$$\Rightarrow \#\{n \in X \mid 3 | n\} = 10^3 \cdot 3$$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?
b) Per quali valori di A la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 3$?
c) Per quali valori di a il vettore $(4, -1)$ è autovettore di A?

Polinomio caratteristico di A: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix}$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+1)\lambda + (a+1)$

A è diagonalizzabile su $\mathbb{R} \iff p_A(\lambda)$ si fattorizza in fattori di 1° grado su $\mathbb{R}$ e la molt algebrica delle radici coincide con la molt geometrica.

Ricerca radici: $\Delta = (a+1)^2 - 4(a+1) = (a+1)(a-3)$

$\lambda_1 = \dfrac{a+1-\sqrt{\Delta}}{2}$ $\qquad \lambda_2 = \dfrac{a+1+\sqrt{\Delta}}{2}$

Se $\Delta > 0$ cioè $a < -1 \lor a > 3$ il pol caratt ha 2 radici distinte λ_1 e λ_2 che sono quindi di molt algebrica 1 $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

Se $\Delta < 0$ cioè $-1 < a < 3$ $p_A(\lambda)$ è irrid su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ A non è diag su $\mathbb{R}$

Se $\Delta = 0$ cioè $a = -1 \lor a = 3$ $p_A(x) = (x - \lambda_1)^2$ e l'unico autovalore ha molt alg 2 - Per decidere se A è diag. occorre calcolare la molt geometrica

$\boxed{a=-1}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ~~$\det A \neq 0$~~ $\Rightarrow$ dim

$\lambda = 0$ $A - \lambda I \Rightarrow rk(A-\lambda I) = 1$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda I)) = 1$

$\parallel$

molt geometrica di λ < molt alg

Per $\underline{a=-1}$ la matrice A non è diag.

$a = 3 \Rightarrow \lambda = 2$ $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $rk(A-2I) = 1$

molt alg di $\lambda=2$ = $\dim(\mathrm{Ker}(A-2I)) = 1 <$ molt alg

Per $\underline{a=3}$ la matrice A non è diagonalizzabile.

b) $\underline{\lambda = 3 \text{ è autovalore di } A} \Leftrightarrow 3$ è radice del pol caratt.

$\Leftrightarrow p_A(3) = 3^2 - (a+1)3 + (a+1) = 0 \Leftrightarrow$

$9 - 3a - 3 + a + 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{a = 7/2}$

c) $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$Av = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\parallel$

~~$4+1$~~ $\begin{pmatrix} 5 \\ 4-a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 5 = \lambda 4 \\ 4 - a = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 5/4 \\ a = 4 + 5/4 = 21/4 \end{cases}$

$\underline{\text{Conclusione}}$: $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A $\Leftrightarrow a = \frac{21}{4}$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 4. Sia $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x,y,z) = (x-y, x+2y+3z, y+z).$$

a) Determinare una base del nucleo e una dell'immagine di f e dire se questi due spazi sono in somma diretta.
b) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare non nulla $g: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ sia l'applicazione nulla.

Matrice associata a f rispetto alla base canonica

$$A = \left(f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3) \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riduco con Gauß per riga

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rk}\, A = 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, f = 2$$

Inoltre ai 2 pivot della matrice a scala corrispondono nella matrice A i vettori di una base di $\mathrm{Im}\, f$ $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathrm{Im}\, f$

Base $\ker f$: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y = -\lambda \\ y = -z = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Base $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Due ssp vettoriali $U, W \subset V$ sono in somma diretta se e solo se $U \cap W = \{0\}$.
$\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\} \iff \ker f \not\subset \mathrm{Im}\, f$ (questo perché $\ker f$ ha dimensione 1) Basta quindi vedere se $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, f \iff \exists a, b \in \mathbb{R}$ tale che

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ a+2b=-1 \\ 3b=1 \end{cases}$$ ha soluzione

$$\begin{cases} a=-1-\cancel{1}/3 \\ a=-1-2/3 \\ b=1/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-4/3 \\ a=-5/3 \\ b=1/3 \end{cases}$$ incompatibile

$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\notin \mathrm{Im} f \Rightarrow$ Ker f e Im f sono in somma diretta.

b) Per definire un'applic lineare basta assegnare i valori che questa assume su una base ed definirla su tutto lo spazio per linearità:
Scegliamo come base di $\mathbb{R}^3$ $\left\{ \underbrace{\overset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} \overset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}}_{\text{base Im} f} \underbrace{\overset{v_3}{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}}}_{\text{base Ker} f} \right\}$

(dal punto precedente deduciamo che sono una base)

~~come potremmo prendere~~ $\cancel{v_3}$

Poniamo $g(v_1)=\underline{0}$

$g(v_2)=\underline{0}$

$g(v_3)=v_3$

g non è l'applicazione nulla

$\cancel{g\circ f(e_1)=g(v_1)=0}$

$\cancel{g\circ f(e_2)=g(v_2)\neq 0}$

$\cancel{g\circ f(e_1-e_2+e_3)=g(0)=\underline{0}}$

cioè $g|_{\mathrm{Im} f}=0$

$g\circ f(\mathbb{R}^3)=g(f(\mathbb{R}^3))=\underline{0}$