

Matematica Discreta e Algebra Lineare — 1° appello
A.A. 2014/15 — 9 giugno 2015

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

Esercizio 1. Calcolare le soluzioni della seguente congruenza:

$$25x \equiv 2^{49} \pmod{17}.$$

Quante sono le soluzioni comprese tra 1 e 100?

Esercizio 2. Siano $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ e $B = \{1, 2, \dots, 20\}$.

- a) Quante sono le funzioni $f : A \rightarrow B$ iniettive?
- b) Quante sono le funzioni $f : A \rightarrow B$ strettamente crescenti?
- c) Quante sono le funzioni $f : A \rightarrow B$ con immagine di esattamente 8 elementi?

Esercizio 3. Sia $C: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi standard, è

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Trovare una base di $U = \ker C$ e $W = \operatorname{im} C$.
- (b) Scrivere un sistema lineare omogeneo il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio W .

Esercizio 4. Sia $B: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo lineare la cui matrice, rispetto alla base standard, è

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Dimostrare che $\lambda_1 = 1$ è un autovalore di B con molteplicità geometrica 3 e che questo permette di dire che il polinomio caratteristico si fattorizza come prodotto di polinomi irriducibili di grado 1.
- (b) Dire se esiste un altro autovalore di B diverso da 1. [Suggerimento: non occorre calcolare il polinomio caratteristico per rispondere, ci sono metodi molto più veloci.] L'endomorfismo B è diagonalizzabile?

