Matematica Discreta e Algebra Lineare — 1° appello
A.A. 2014/15 — 9 giugno 2015

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

Esercizio 1. Calcolare le soluzioni della seguente congruenza:

$$25x \equiv 2^{49} \pmod{17}.$$

Quante sono le soluzioni comprese tra 1 e 100?

$25 \equiv 8 \equiv 2^3 \quad (17)$

$25x \equiv 2^{49} \ (17) \iff x \equiv 2^{46} \ (17)$

Calcoliamo il resto ~~della~~ di 2^{46} mod 17.

Dal piccolo Teorema di Fermat sappiamo che

ord $2 \mid 17-1=16$.

$2^0 \equiv 1 \quad 2^1 \equiv 2 \quad 2^2 \equiv 4 \quad 2^4 \equiv -1 \quad 2^8 \equiv 1$

$\Rightarrow$ ord $2 = 8$

$46 = 5 \cdot 8 + 6 \quad \Rightarrow 2^{46} \equiv 2^{8 \cdot 5 + 6} \equiv (2^8)^5 2^6 \equiv -4$

$\boxed{x \equiv -4 \quad (17)}$

o equivalentemente $x = -4 + 17k \quad k \in \mathbb{Z}$.

Calcoliamo quante sono le soluzioni tra 1 e 100 $\quad 1 \leq -4 + 17k \leq 100$

$\iff 5 \leq 17k \leq 104 \iff \frac{5}{17} \leq k \leq \frac{104}{17}$

ed essendo k intero $\iff 1 \leq k \leq 6$

Ci sono quindi 6 soluzioni tra 1 e 100

Esercizio 2. Siano $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ e $B = \{1, 2, \dots, 20\}$.
a) Quante sono le funzioni $f : A \to B$ iniettive?
b) Quante sono le funzioni $f : A \to B$ tali che l'immagine contiene solo numeri pari?
c) Quante sono le funzioni $f : A \to B$ strettamente crescenti?

a) $f\ A \to B$ è iniettiva $\iff \forall a_1 \neq a_2 \in A \quad f(a_1) \neq f(a_2)$
cioè elementi distinti di A devono avere immagini distinte in B

$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad \dots \quad f(10)$
$\downarrow$ 20 scelte, $\downarrow$ 19 scelte, $\downarrow$ 18 scelte, ..., $\downarrow$ 11 scelte

$\Rightarrow \#\{f\ A \to B \mid f \text{ è iniettiva}\} = 20 \cdot 19 \cdots 11 = \frac{20!}{10!}$

b) $\#\{f\ A \to B \mid f(A) \subset \{2, \dots, 20\}\} = \#\{f\ A \to \{2, 4, \dots, 20\}\}$
$= 10^{10}$ (per ognuno dei 10 el di A ho 10 possibili immagini)

c) f crescente $\Rightarrow f$ iniettiva $\Rightarrow \# f(A) = 10$
D'altra parte $\forall C \subseteq B \quad \# C = 10$
esiste un'unica funzione crescente $f\ A \to B$ t.c. $f(A) = C$
(se $C = \{c_1, \dots, c_{10}\}$ con $c_1 < c_2 < \dots < c_{10}$
la funzione è quella definita da $f(i) = c_i$)

$\Rightarrow \#\{f\ A \to B \mid f \text{ crescente}\} = \#\{C \subseteq B \mid \#C = 10\}$
$= \binom{20}{10}$