

Matematica Discreta e Algebra Lineare — 1° appello
 A.A. 2014/15 — 9 giugno 2015

Cognome e nome:
 Numero di matricola:
 Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

Esercizio 1. Calcolare le soluzioni della seguente congruenza:

$$25x \equiv 2^{49} \pmod{17}.$$

Quante sono le soluzioni comprese tra 1 e 100?

$$25 \equiv 8 \equiv 2^3 \pmod{17}$$

$$25x \equiv 2^{49} \pmod{17} \Leftrightarrow x \equiv 2^{46} \pmod{17}$$

Calcoliamo il resto ~~di~~ di $2^{46} \pmod{17}$.

Dal piccolo Teorema di Fermat sappiamo che

$$\text{ord } 2 \mid 17-1=16.$$

$$2^0 \equiv 1 \quad 2^1 \equiv 2 \quad 2^2 \equiv 4 \quad 2^4 \equiv -1 \quad 2^8 \equiv 1$$

$$\Rightarrow \text{ord } 2 = 8$$

$$46 = 5 \cdot 8 + 6$$

$$\Rightarrow 2^{46} \equiv 2^{8 \cdot 5 + 6} \equiv (2^8)^5 \cdot 2^6 \equiv -4$$

$$\boxed{x \equiv -4 \pmod{17}}$$

o equivalentemente

$$x = -4 + 17k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Calcoliamo quante sono le soluzioni tra 1 e 100

$$1 \leq -4 + 17k \leq 100$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq 17k \leq 104 \Leftrightarrow \frac{5}{17} \leq k \leq \frac{104}{17}$$

$$\text{ed essendo } k \text{ intero} \Leftrightarrow 1 \leq k \leq 6$$

Ci sono quindi **6** soluzioni tra 1 e 100

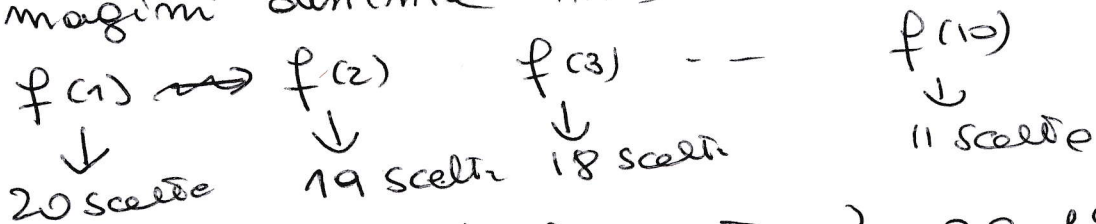
Esercizio 2. Siano $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ e $B = \{1, 2, \dots, 20\}$.

a) Quante sono le funzioni $f: A \rightarrow B$ iniettive?

b) Quante sono le funzioni $f: A \rightarrow B$ tali che l'immagine contiene solo numeri pari?

c) Quante sono le funzioni $f: A \rightarrow B$ strettamente crescenti?

a) $f: A \rightarrow B$ è iniettiva $\Leftrightarrow \forall a_1 \neq a_2 \in A \quad f(a_1) \neq f(a_2)$
 cioè elementi distinti di A devono avere un'immagine distinta in B



$$\Rightarrow \# \{ f: A \rightarrow B \mid f \text{ iniettiva} \} = 20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 11 = \frac{20!}{10!}$$

b) $\# \{ f: A \rightarrow B \mid f(A) \subset \{2, \dots, 20\} \} = \# \{ f: A \rightarrow \{2, 4, \dots, 20\} \}$
 $= 10^{10}$ (per ognuno dei 10 el di A ho 10 possibili immagini)

c) f crescente $\Rightarrow f$ iniettiva $\Rightarrow \# f(A) = 10$
 D'altro punto $\forall C \subset B \quad \# C = 10$
 Esiste un'unica funzione crescente $f: A \rightarrow B$ che $f(A) = C$
 (se $C = \{c_1, \dots, c_{10}\}$ con $c_1 < c_2 < \dots < c_{10}$
 la funzione è quella definita da $f(i) = c_i$)

$$\Rightarrow \# \{ f: A \rightarrow B \mid f \text{ crescente} \} = \# \{ C \subset B \mid \# C = 10 \} = \binom{20}{10}$$