Compito di MD
A.A. 2014/15 – 2 luglio 2015

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1.
Sia $a \in \mathbb{Z}$. Cosideriamo il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{76} \\ x \equiv a \pmod{8} \end{cases}$$

i) Per quali valori di a il sistema ha soluzione?
ii) Deteminare le soluzioni del sistema per $a = 111$.

i) Risolvo la prima equazione

$3x \equiv 5 \quad (76) \iff (-25)3 \equiv 5(-25) \quad (76)$

$\iff x \equiv 27 \quad (76)$

-25 è l'inverso di 3 mod 76. Posso moltiplicare perché $(-25, 76) = 1$

Il sistema diventa:

$\begin{cases} x \equiv 27 & (76) \\ x \equiv a & (8) \end{cases}$ e sappiamo che ha soluzione $\iff (76, 8) = 4 \mid 27 - a \iff$ $\boxed{a \equiv -1 \quad (4)}$

$a \equiv 27 \equiv -1 \quad (4)$

$a = 111$

$$\begin{cases} x \equiv 27 \ (76) \\ x \equiv 111 \equiv -1 \ (8) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 27 + 76k \\ 27 + 76k \equiv -1 \ (8) \end{cases}$$

$4k \equiv -28 \quad (8)$

$k \equiv -7 \quad (2)$

$k \equiv 1 \ (2)$

$x \equiv 27 + 76(1 + 2h) = 27 + 76 + 152h$

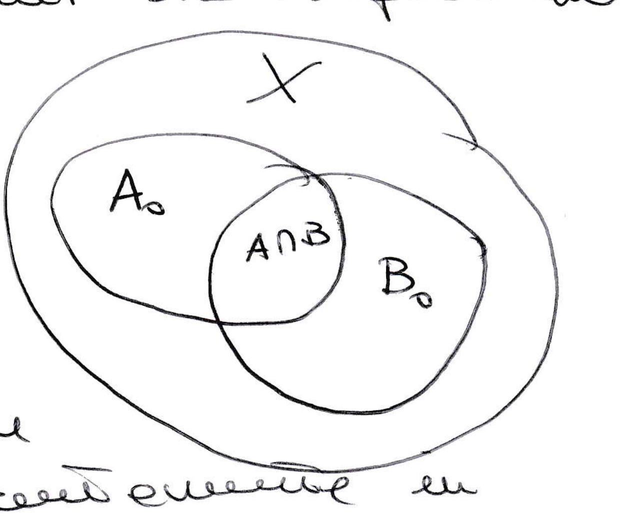
$$\boxed{x \equiv 103 \quad (152)}$$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

Esercizio 2.
Sia $\mathbb{N}_{50} = \{1, 2, 3, \ldots, 49, 50\}$.
a) Contare le coppie (A, B) di sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{50}$ tali che $A \cap B = \emptyset$.
b) Contare le coppie (A, B) di sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{50}$ tali che $A \cap B$ contiene solo multipli di 5.
c) Contare le coppie (A, B) di sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{50}$ tali che $A \cap B$ coincide con l'insieme dei multipli di 5 che appartengono ad A o a B.

Per risolvere l'esercizio possiamo considerare il seguente modello: Abbiamo 4 scatole ~~for~~ una corrispondente a $A \cap B$ una a $A_0 = A - A \cap B$, una a $B_0 = B - A \cap B$ e una $X = (A \cup B)^c$) e vogliamo distribuire in queste 50 palline numerate da 1 a 50 seguendo le regole descritte nei vari punti. I modi di distribuire le palline compatibilmente con le richieste, contano le coppie di sottoinsiemi che verificano le condizioni imposte.



a) La scatola $A \cap B$ deve rimanere vuota, sulle altre non ho richieste
$\Rightarrow$ ognuna delle 50 palline può essere messa indifferentemente in A_0, B_0 o X, per ognuna ho quindi 3 scelte
$\Rightarrow$ $\boxed{3^{50}}$ coppie (A, B) con $A \cap B = \emptyset$

b) In questo caso i multipli di 5 ~~possono~~ (che sono 10) possono essere messi in ognuna delle 4 scatole $\rightarrow 4^{10} = 2^{20}$ possibilità

I non multipli di 5 (che sono 40) non possono andare in $A \cap B$ $\Rightarrow 3^{40}$ possibilità

$\Rightarrow$ In Totale $\boxed{4^{10} \cdot 3^{40} = 2^{20}\, 3^{40}}$ possibili coppie (A,B)

c) La richiesta corrisponde a dire che i multipli di 5 possono essere messi solo in $A \cap B$ e in X $\Rightarrow 2^{10}$ possibilità

I non multipli di 5 possono essere messi solo in A_0, B_0, X $\Rightarrow 3^{40}$ possibilità.

$\Rightarrow$ in Totale $\boxed{2^{10} \cdot 3^{40}}$