Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 3.
Sia $A \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a^2+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ A è diagonalizzabile sul campo $\mathbb{R}$.

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \det \begin{bmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ 1 & 0 & a^2+1 & -x \end{bmatrix} = -x \det \begin{bmatrix} -x & a^2 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & a^2+1 & -x \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & a^2+1 & x \end{bmatrix} =$$

$$= -x\left(-x^3 - (-x)(a^2+1)\right) - (-a^2) = x^4 - x^2(a^2+1) + a^2$$

Calcolato utilizzando Laplace sulla 1ª riga. Altre scelte sono possibili.

Nota: non c'è una formula tipo-Sarrus per calcolare determinanti 4×4 con prodotti di diagonali. Non si può riordinare le righe di A ottenendo un'altra matrice B e poi calcolare $p_B(x) = \det(B - xI)$, perché $p_B(x) \neq p_A(x)$.

Ponendo $t = x^2$, si ottiene $p_A(x) = 0 \iff t^2 - (a^2+1)t + a^2 = 0$, che ha soluzioni $t_1 = 1$, $t_2 = a^2$. Quindi le soluzioni di $p_A(x) = 0$ sono date da $x = \pm\sqrt{t_1}$, $x = \pm\sqrt{t_2}$, cioè

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = a$, $x_4 = -a$.

Queste sono sempre distinte a meno che $a \in \{-1, 0, 1\}$.
Quindi se $a \notin \{-1, 0, 1\}$ la matrice è diagonalizzabile perché ha 4 autovalori reali distinti.

Se $\boxed{a=0}$, la matrice ha autovalori ± 1 con $m_a(\pm 1)=1$.
e un autovalore 0 con $m_a(0)=2$.
$0<m_g(\pm 1)\leq m_a(\pm 1)$, quindi $m_g(\pm 1)$ vale 1. Dobbiamo controllare quanto vale $m_g(0)$.

$$\dim \operatorname{Ker} A-0\cdot I=\dim \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\underset{\text{elim. Gauss}}{=}\dim \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=1.$$

$m_g(0)<m_a(0)$, quindi per $a=0$ la matrice non è diagonalizzabile.
Se $\boxed{a=\pm 1,}$ la matrice ha autovalori ± 1 con $m_a(1)=m_a(-1)=2$.
Dobbiamo controllare $m_g(1)$, $m_g(-1)$.

$$\dim \operatorname{Ker} A-1\cdot I=\dim \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&-1&0\\0&0&-1&1\\1&0&2&-1\end{bmatrix}\underset{\text{elim. Gauss}}{=}\dim \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&-1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=1$$

$m_g(1)<m_a(1)$, quindi per $a=\pm 1$ la matrice non è diagonalizzabile.
Risposta finale: A è diagonalizzabile se e solo se $a\notin\{-1,0,1\}$.

Nota: se A ha dimensione 4, $p_A(x)$ ha sempre grado 4 e ci sono 4 autovalori contati con molteplicità algebrica. Qualunque altro risultato deve essere sbagliato

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

Esercizio 4.
Si consideri l'applicazione lineare

$$\Phi : Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

tale che, per ogni $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ valga $\Phi(A) = AB$, dove B è la seguente matrice fissata:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Determinare la dimensione di $Ker\ \Phi$ e descriverne una base.
- Determinare la dimensione di $Im\ \Phi$ e descriverne una base.

Prendiamo $w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $w_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ come base di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Φ è un'applicazione lineare da $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, a cui è associata una matrice 4×4.

$$\Phi(w_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = w_1 + 2w_2$$

$$\Phi(w_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2w_1 + 4w_2$$

$$\Phi(w_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = w_3 + 2w_4$$

$$\Phi(w_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2w_3 + 4w_4$$

La matrice associata a Φ nella base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ è

$$C = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phi w_1 & \phi w_2 & \phi w_3 & \phi w_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elim. Gauss:

$$C \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Im} C = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\operatorname{Ker} C = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Quindi

$$\operatorname{Im} \phi = \operatorname{span}(w_1 + 2w_2, w_3 + 2w_4) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{span}(w_2 - 2w_1, w_4 - 2w_3) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\dim \operatorname{im} \phi = \dim \operatorname{Ker} \phi = 2.$