Compito di MD — corso A
A.A. 2015/16 – 3 settembre 2015

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1.
a) Sia $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x, y) = 15x + 70y$.
Dire se f è surgettiva, se è iniettiva e determinare $f^{-1}(10)$.

b) Sia $a \in \mathbb{Z}/70\mathbb{Z}$ e sia $g : \mathbb{Z}/70Z \to \mathbb{Z}/70\mathbb{Z}$ la funzione definita da $g(x) = ax$.
Per quali valori di a la funzione g è surgettiva? Per quali valori è iniettiva?
Determinare l'immagine di g per $a = [20]$.

a) f non è surgettiva: Basta mostrare che $1 \notin \mathrm{Im}\, f$

$1 \in \mathrm{Imm}\, f \iff \exists (x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ t.c. $f(x,y) = 1$

$\iff$ l'eq $15x + 70y = 1$ ha sol $x, y \in \mathbb{Z}$.

~~Dalla~~ Sappiamo però che l'eq $ax + by = c$ ha sol

$\iff (a,b) \mid c$, quindi poiché $(15,70) = 5 \nmid$

$\Rightarrow$ l'eq non ha soluzione;

Calcolo $f^{-1}(10)$: $f^{-1}(10) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid f(x,y) =$

~~Cioè~~ Cerco le soluzioni di $15x + 70y =$

$\iff 3x + 14y = 2 \iff 14y \equiv 2\ (3) \iff y \equiv 1$

$\iff y = 1 + 3t$ $\quad 3x + 14(1+3t) = 2 \Rightarrow x = -4$

$f^{-1}(10) = \{(-4 - 14t,\ 1 + 3t) \mid t \in \mathbb{Z}\}$

f non è iniettiva: Infatti

$f(-4,1) = f(10,2) = 10$

b) Suriettività $g(x) = ax$ è suriettiva

se $\forall b \in \mathbb{Z}/70\mathbb{Z}$ $\exists x \in \mathbb{Z}/70\mathbb{Z}$ t.che $g(x) = b$.

g è surg $\Leftrightarrow$ $\forall b$ ha sol la congruenza

$ax \equiv b \ (70)$ ha sol.

Sappiamo che questo ha sol $\Leftrightarrow (a,70) \mid b$.

In particolare per $b = 1$ deve essere $(a,70) = 1$

D'altra parte se $(a,70) = 1$ la cond

$(a,70) \mid b$ è verificata $\forall b$. Quindi

g è surg $\Longleftrightarrow (a,70) = 1$.

g è iniettività: Poiché g è una funzione con lo stesso dominio e codominio di cardinalità finita, g è iniettiva $\Leftrightarrow$ g è suriettiva $\Leftrightarrow (a,70) = 1$.

~~Dal~~ $g_{20} =$

$a = \overline{20}$ $\quad$ $\mathrm{Im}\, g = \{\overline{20}x \mid x \in \mathbb{Z}/70\mathbb{Z}\} =$

$b \in \mathrm{Im}\, g \Leftrightarrow \exists x$ t.che $20x \equiv b \ (70)$

$\Leftrightarrow (20,70) = 10 \mid b$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, g = \{\overline{0}, \overline{10}, \overline{20}, \overline{30}, \overline{40}, \overline{50}, \overline{60}\}$

Esercizio 2.

Consideriamo i numeri del tipo $abc132$ dove a, b, c sono cifre decimali (cioè $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$).

i) Quanti tra tali numeri sono divisibili per 4?

ii) Quanti tra tali numeri sono divisibili per 3?

i) Un numero è divisibile per 4 $\Leftrightarrow$ lo sono le sue ultime 2 cifre (questo perché $100 \equiv 0 \ (4)$)

Poiché 32 è divisibile per 4, ogni numero tra quelli considerati è div per 4. Contiamo

$a \neq 0 \qquad 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$

(Se accetto anche $a = 0$ ho $10^3 = 1000$)

ii) Un numero è div per 3 $\Leftrightarrow$ la somma delle sue cifre è div per 3.

$3 | abc132 \Leftrightarrow a+b+c+1+3+2 \equiv 0 \ (3) \Leftrightarrow$

$a+b+c \equiv 0 \ (3) \Leftrightarrow 3 | abc$

~~Caso a=~~ Ora $100 \leq abc \leq 999$

Conto i multipli di 3 in questo intervallo

$100 \leq 3t \leq 999 \Leftrightarrow \frac{100}{3} \leq t \leq 999$

$\Leftrightarrow 33 < t \leq 333 \Rightarrow 300$ possibili va

Se accetto anche che $\underline{a=0}$ allora ho

$0 \leq abc \leq 999$

$0 \leq 3t \leq 999 \qquad 0 \leq t \leq 333$

$\Rightarrow 334$ possibili valori

Esercizio 3.
Sia

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 2}(\mathbb{R}),$$

e si indichino con v_1 e v_2 le sue colonne.

1. Si trovino $\operatorname{Im} V$ e $\operatorname{Ker} V$.
2. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} V$?
3. Si trovino due vettori v_3, v_4 tali che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$.

1. Le due colonne di V sono linearmente indipendenti (perché non sono l'una multiplo dell'altra, oppure perché Gauss dà $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)

quindi $\operatorname{Im} V$ ha base $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ e dimensione 2.

Non ci sono variabili libere, quindi $\operatorname{Ker} V = \{0\}$
(o anche: $\dim \operatorname{Ker} V = 2 - \dim \operatorname{Im} V = 0$)

2. $\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}\, V$ se e solo se la matrice

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 5 & a \end{bmatrix}$$ non ha un pivot nella terza colonna.

$$W \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 5 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -a \\ 0 & 5 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-a+5} \\ 0 & 0 & \boxed{a-5} \end{bmatrix}$$

perché non ci sia un pivot dev'essere $-a+5 = a-5 = 0$, cioè $\boxed{a=5}$

3. Riduciamo a scala

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ Pivot nelle prime 4 colonne

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

formano una base

(altre scelte sono possibili)

Esercizio 4.
Sia

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

1. Si determinino autovalori e autovettori di M sul campo $\mathbb{R}$.
2. Si dica, motivando la risposta, se esistono una matrice $V \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tali che $M = VDV^{-1}$.
3. Si trovi una possibile scelta di tali V e D.

1. $\mathrm{Det}\, M - xI = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} -x & 2 & 1 \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 2 & -x \end{bmatrix} = x^2(3-x)+4+4-(-4x-4x+(3-x)) =$

$= -x^3+3x^2+9x+5 = (-1-x)(-1-x)(5-x)$

Autovalori: -1, 5.

Autovettori relativi a -1:

$\mathrm{Ker}\, M+(-1)I = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

(<u>non</u> solo quei due vettori, tutto lo span)

Autovettori relativi a 5:

$\mathrm{Ker}\, M-5I = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & 12 & -24 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$

2. Sì, esiste, perché la matrice è diagonalizzabile per il punto 1.
(o anche: perché è simmetrica)

3. V, D sono le matrici di autovettori e autovalori di M:

$$V = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(difatti è equivalente a $MV = VD$).