

Compito di MD — corso A
A.A. 2015/16 – 3 settembre 2015

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1.

a) Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x, y) = 15x + 70y$. Dire se f è surgettiva, se è iniettiva e determinare $f^{-1}(10)$.

b) Sia $a \in \mathbb{Z}/70\mathbb{Z}$ e sia $g : \mathbb{Z}/70\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/70\mathbb{Z}$ la funzione definita da $g(x) = ax$.

Per quali valori di a la funzione g è surgettiva? Per quali valori è iniettiva? Determinare l'immagine di g per $a = [20]$.

Esercizio 2.

Consideriamo i numeri del tipo $abc132$ dove a, b, c sono cifre decimali (cioè $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$).

- i) Quanti tra tali numeri sono divisibili per 4?
- ii) Quanti tra tali numeri sono divisibili per 3?

Esercizio 3.

Sia $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi standard è

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 2}(\mathbb{R}),$$

e si indichino con v_1 e v_2 le sue colonne.

1. Si trovino $\text{Im } T$ e $\text{Ker } T$.

2. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}$ appartiene a $\text{Im } T$?

3. Si trovino due vettori v_3, v_4 tali che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sia una base di \mathbb{R}^4 .

Esercizio 4.

Sia $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo lineare la cui matrice, rispetto alla base standard è

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

1. Si determinino autovalori e autovettori di M sul campo \mathbb{R} .
2. Si dica, motivando la risposta, se esistono una matrice $A \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tali che $[M] = ADA^{-1}$.
3. Si trovi una possibile scelta di tali A e D .

