

# Soluzioni

Compito di MDAL

10 Febbraio 2016

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

**Esercizio 1.** Trovare tutte le soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2^x \equiv 1 \pmod{7} \\ 3^x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

$$2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$$

Quindi  $\text{ord}_7(2) = 3$ , e  $2^x \equiv 1 \pmod{7} \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{3}$

$$3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \equiv -1 \quad 3^3 = -3 \equiv 2 \quad 3^4 = (-1)^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

Quindi  $\text{ord}_5(3) = 4$ , e  $3^x \equiv 1 \pmod{5} \Leftrightarrow x \equiv 3 \pmod{4}$

Il sistema allora diventa

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Che ha soluzione unica mod 12 per il teorema cinese del resto. Una soluzione (trovata per tentativi) è  $x = 3$ .

Quindi la soluzione completa del sistema è  $x \equiv 3 \pmod{12}$ .

(Non è sbagliato escludere i casi per cui  $x < 0$ )

**Esercizio 2.** Consideriamo i seguenti insiemi di matrici  $4 \times 4$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ :

1. Matrici con esattamente due "1" su ogni riga.
2. Matrici con tutti numeri diversi su ciascuna riga.
3. Matrici con tutti numeri diversi su ciascuna delle prime 3 righe e sulla prima colonna.

i) Determinare il numero delle matrici in ciascuno dei gruppi 1,2,3.

ii) Chiamato  $n_i$  il numero delle matrici nel gruppo  $i$ , disporre in ordine crescente i numeri  $n_1, n_2, n_3$ .

i) 1: In ogni riga, scelgo la posizione degli 1 in  $\binom{4}{2}$  modi diversi e gli altri numeri in  $4 \cdot 4$  modi.  
Le possibilità riguardanti righe diverse sono scelte indipendenti, quindi vanno moltiplicate (occurs in common)

$$|\text{insieme 1}| = \left[ \binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 4 \right]^4 = 6^4 \cdot 4^4 \cdot 4^4$$

2: In ogni riga, ho 5 scelte per il primo numero, 4 per il secondo, 3 per il terzo, 2 per il quarto. Quindi

$$|\text{insieme 2}| = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^4$$

3: scelgo le matrici nel modo seguente: prima scelgo gli elementi della prima colonna in  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$  modi. Poi posso completare la prima riga scegliendo il secondo numero in 4 modi (diverso del primo), il terzo in 3, il quarto in 2, e analogamente la 2<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup>.

Non ci sono vincoli sui rimanenti 3 numeri dell'ultima riga, che si possono scegliere in  $5^3$  modi.

Quindi insieme  $z$  =  $\underbrace{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)}_{1^{\text{a}} \text{ colonna}} \cdot \underbrace{(4 \cdot 3 \cdot 2)^3}_{\text{prime 3 righe}} \cdot \underbrace{5^3}_{\text{ultimo riga}}$

$$= 5^4 4^4 3^4 2^4.$$

ii) Per come abbiamo riscritto le espressioni,

$$n_2 = n_3 = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^4.$$

Restava da confrontare  $n_1$  e  $n_2$ .

$n_1$  e  $n_2$  sono ordinati come

$$\sqrt[4]{n_1} = 6 \cdot 4 \cdot 4 \quad \text{e} \quad \sqrt[4]{n_2} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2, \quad \text{visto che}$$

$$a > b \Leftrightarrow a^4 > b^4 \quad (\text{per } a, b \geq 0).$$

Per lo stesso motivo essi sono ordinati come

i numeri

$$\frac{\sqrt[4]{n_1}}{6 \cdot 4} = 4 \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt[4]{n_2}}{5 \cdot 4} = 5,$$

quindi

$$\boxed{n_1 < n_2 = n_3}$$

**Esercizio 3.** Siano dati i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. Considerati come vettori in  $\mathbb{R}^4$ , è vero che essi sono linearmente indipendenti? Si scriva una base di  $\text{span}(v_1, v_2, v_3)$  e la si completi a una base di  $\mathbb{R}^4$ .
2. Considerati come vettori in  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ , è vero che essi sono linearmente indipendenti? Si scriva una base di  $\text{span}(v_1, v_2, v_3)$  e la si completi a una base di  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ .

1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono tre pivot, quindi i tre vettori sono lin. indipendenti.  $v_1, v_2, v_3$  è una base di  $\text{span}(v_1, v_2, v_3)$ .

Aggiungiamo un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono pivot nelle 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>, 5<sup>a</sup> colonne, quindi una base di  $\mathbb{R}^4$  è

$$v_1, v_2, v_3, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(vettori corrispondenti alle colonne con pivot).

2) In  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , l'eliminazione di Gauss precedente è

valida fino a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(perché coinvolge solo interi). Ora però  $3 \equiv 0 \pmod{3}$ ,  
quindi continuiamo con

$$\dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono due pivot, quindi i vettori non sono lin. ind. e  
una base di  $\text{span}(v_1, v_2, v_3)$  è  $(v_1, v_2)$  (colonna con pivot).

Completiamoli a una base di  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ pivot nelle colonne } 1, 2, 4, 5:$$

allora  $v_1, v_2, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  sono una base di  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ .

Esercizio 4. Sia  $M \in \text{Mat}_{4,4}(\mathbb{R})$  data da

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinare autovalori e autovettori di  $M$ . La matrice è diagonalizzabile?

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ -4 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

sviluppo sulla  
2<sup>a</sup> colonna

$$= -\lambda \cdot [(-2-\lambda)(2-\lambda) + 4] = -\lambda(\lambda^2 - 4 + 4) = -\lambda^3.$$

C'è il solo autovalore  $0$  con  $M_a(0) = 3$ .

$$\begin{aligned} \text{Ker}(M - 0 \cdot I) &= \text{Ker} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \left\{ x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

$M_g(0) = 2 < M_a(0)$ , quindi la matrice non è diagonalizzabile.

Gli autovettori relativi a  $\lambda = 0$  sono  $\text{span} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

(occhio - tutto il loro span, non solo due vettori).