

Esercizio 3. Sia $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sia W il sottoinsieme di V formato da tutti i suoi elementi che hanno le prime due componenti uguali a zero.

1. Qual è la dimensione di V ?
2. È vero o no che W è un sottospazio vettoriale?
3. Si calcoli una base di W .

1. $V = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ Eliminazione di Gauss sulla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 pivot, l'immagine ha dimensione 3

$$\boxed{\dim V = 3}$$

2. $W = \left\{ v \in V : v = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right\}$.

Si, perché soddisfa la definizione di sottospazio vettoriale:

se $w_1, w_2 \in W$ e $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$, allora

• $w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$ che ha le prime due entrate nulle e appartiene a V (perché V è uno spazio vettoriale)

• se λ è un elemento di \mathbb{R} , $\lambda w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{bmatrix} \in W$ analogamente

Inoltre, $0 \in W$ (perché $0 \in V$).

3. Metodo 1: $W = V \cap \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Scriviamo V come kernel: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in V \Leftrightarrow \text{rk} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 2 & 2 & z \\ 1 & 3 & -1 & w \end{bmatrix} < 4$.

Riduciamo e scala la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 2 & 2 & z \\ 1 & 3 & -1 & w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-x \\ 0 & 1 & -2 & w-x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & -2 & w-x \\ 0 & 0 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & y-x \end{bmatrix}$$

Il rango è 3
se e solo se
 $y-x=0$

Quindi $V = \text{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$W \cap V = \text{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

riduzione o scala

Una base di W è $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Metodo 2: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix} \in V$ se $\text{rk} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & z \\ 1 & 3 & -1 & w \end{bmatrix} = 3$.

Riducendo e scala, otteniamo $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & w \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ \Rightarrow rk è sempre 3.
per ogni $z, w \in \mathbb{R}$

Quindi $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix} \in W$ per ogni $z, w \in \mathbb{R}$. Quindi $W = \left\{ z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{R} \right\}$

Attenzione: non è automatico che W sia lo span dei vettori ottenuti da v_1, v_2, v_3 ponendo le prime due componenti a 0,

cioè $W = \text{span} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. In questo caso è vero, ma non

sempre: per esempio, se $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ allora \rightarrow

Per esempio, se $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, allora

$W = \text{span}(v_1, v_2, v_3) \cap \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{0\}$, mentre

$$\text{span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \neq \{0\}.$$

Esercizio 4. Trovare una base di \mathbb{R}^3 formata da autovettori dell'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base standard è

$$[L] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\det([L] - xI) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^3 + 1 + 1 - 3 \cdot (2-x) =$$

$$= -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6 + 3x + 2 = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4.$$

$x=1$ è soluzione.

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 6x^2 - 9x + 4 & -x^2 + 5x - 4 \\ -x^3 + x^2 & x - 1 \\ \hline // & 5x^2 - 9x + 4 \\ & 5x^2 - 5x \\ \hline // & -4x + 4 \end{array}$$

$$\det([L] - xI) = (x-1)(-x^2 + 5x - 4) = (x-1)(x-1)(-x+4)$$

Autovetori: $\lambda = 1 \quad m_a(1) = 2$

$\lambda = 4 \quad m_a(4) = 2$

$\boxed{\lambda = 1}$: ~~Ker~~ $([L] - \lambda I) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \text{span} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

$$\boxed{\lambda=4} \quad \text{Ker}([L]-\lambda I) = \text{Ker} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono autovettori di autovalore $\lambda=1$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda=4$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono vettori linearmente indipendenti,
e formano una base di \mathbb{R}^3 .