Corso "Matematica Discreta"
Anno accademico 2015-2016

LISTA DOMANDE PER L'ORALE BREVE.

1. Dimostrare una delle leggi che coinvolgono l'intersezione, l'unione, il complementare di insiemi contenute nel Teorema 5.2 (la legge viene scelta dalla commissione).
2. Esporre e dimostrare la formula per la somma dei primi n numeri positivi, o dei loro quadrati, o dei loro cubi.
3. Risolvere un esercizio del tipo: trovare tutti i numeri naturali n per cui vale $2^n \geq n^3 + n^2 + 2$ (motivare la risposta).
4. Fare una dimostrazione in cui si usa il principio del minimo.
5. Definire la successione di Fibonacci e dare una formula compatta per i numeri di Fibonacci. Spiegare.
6. Saper spiegare il metodo per (provare a) trovare una formula compatta per una successione definita per ricorrenza lineare e a coefficienti costanti.
7. Dare le definizioni di funzione iniettiva,surgettiva, bigettiva e spiegare l'enunciato del principio dei cassetti.
8. Date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, è vero o falso che $g \circ f$ iniettiva implica f iniettiva? È vero o falso che $g \circ f$ iniettiva implica g iniettiva? Spiegare.
9. Date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, è vero o falso che $g \circ f$ surgettiva implica f surgettiva? È vero o falso che $g \circ f$ surgettiva implica g surgettiva? Spiegare.
10. Dato un insieme X di cardinalità n e un insieme Y di cardinalità m, quante sono le funzioni da X a Y? E quante sono le funzioni iniettive da X a Y? (Considerare i casi $n > m$ e $n \leq m$). Spiegare.
11. Dato un insieme finito X di cardinalità $n \geq 0$, qual è la cardinalità del suo insieme delle parti? Spiegare.
12. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $0 \leq r \leq n$. Dare la definizione di $\binom{n}{r}$ e spiegare come mai $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$.
13. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $1 \leq r \leq n-1$. Dimostrare la formula
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$
14. Considerato il poker a 52 carte, saper contare quante sono le mani che contengono: un colore oppure una scala oppure nessun punto, oppure un poker oppure un full, oppure un tris, oppure una doppia coppia, oppure una coppia.

15. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $0 \leq r \leq n$. Dare la definizione di $\binom{n}{r}$ e dimostrare la formula

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

16. Sia $n \in \mathbb{N}$. Quanto vale $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$? Spiegare.

17. Sia $n \in \mathbb{N}$. Quanto vale $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}$? Spiegare.

18. Enunciare (e dimostrare, almeno nel caso di tre insiemi) il principio di inclusione-esclusione.

19. Contare le funzioni surgettive da un insieme X di cardinalità 20 ad un insieme Y di cardinalità 3.

20. Siano $a, b, m \in \mathbb{Z}$, con $m \geq 1$. Esporre una condizione necessaria e sufficiente perché l'equazione $ax \equiv b \mod m$ abbia soluzione e saper spiegare la motivazione.

21. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con a, b non entrambi nulli. Esporre una condizione necessaria e sufficiente perché l'equazione diofantea $ax + by = c$ abbia soluzione e saper spiegare la motivazione.

22. Saper spiegare come mai l'equazione diofantea $ax + by = c$ o non ha soluzioni o ne ha infinite.

23. Enunciare e dimostrare il teorema di Bezout.

24. Siano $a, b, m \in \mathbb{Z}$, con $m \geq 1$. Spiegare come mai, se $d|a$ e $d|b$ allora l'equazione

$$ax \equiv b \mod m$$

equivale a

$$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \mod \frac{m}{MCD(d, m)}$$

25. Siano $a, b, m \in \mathbb{Z}$, con $m \geq 1$. Spiegare come mai, se k è un numero primo con m ,

$$ax \equiv b \mod m$$

equivale a

$$kax \equiv kb \mod m$$

26. Enunciare e dimostrare il teorema cinese del resto per due equazioni con moduli primi fra loro.

27. Se m_1, m_2 sono due numeri interi positivi primi fra loro, l'insieme delle soluzioni della congruenza

$$ax \equiv b \mod m_1 m_2$$

coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema dato dalle due equazioni

$$ax \equiv b \mod m_1$$

$$ax \equiv b \mod m_2$$

È vero o falso?

28. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con a, b non entrambi nulli. Spiegare come sono collegate le soluzioni della equazione diofantea $ax + by = c$ con le soluzioni della equazione $ax \equiv c \mod b$.

29. Dimostrare che i numeri primi sono infiniti.

30. È vero o falso che, dati due interi a, b non entrambi nulli, allora gli interi $a' = \frac{a}{MCD(a,b)}$ e $b' = \frac{b}{MCD(a,b)}$ sono primi fra loro ? Spiegare.

31. Spiegare l'algoritmo di Euclide e come mai funziona.

32. Spiegare i criteri di divisibilità per 3, per 11 e per 7 e come mai funzionano.

33. Dato un intero $m \geq 1$, esporre la definizione di 'classe di resto modulo m', spiegare cosa sono gli anelli $\mathbb{Z}_m$, e spiegare come mai $\mathbb{Z}_m$ è un campo se e solo se m è un numero primo.

34. Enunciare e dimostrare il 'piccolo teorema di Fermat'.

35. Risolvere un esercizio del tipo: $1244^{198764} \equiv ? \mod 13$. (Insomma trovare il minimo rappresentante non negativo della classe di resto.)

36. Spiegare come mai per ogni $a \in \mathbb{Z}$ vale $a^{561} \equiv a \mod 561$.

37. Dare la definizione di polinomio irriducibile e caratterizzare i polinomi irriducibili in $\mathbb{C}[x]$ e $\mathbb{R}[x]$.

38. Dare la definizione di polinomio irriducibile e e spiegare il Criterio di Eisenstein per polinomi a coefficienti interi.

39. Definizione di sistema lineare, matrice associata ad un sistema.

40. Spiegare l'algoritmo di Gauss per la riduzione a scala di una matrice e spiegare perché non cambia le soluzioni di un sistema lineare.

41. Risolvere un sistema lineare e saper spiegare l'algoritmo.

42. Definizione di spazio vettoriale e sottospazio vettoriale. Saper verificare che un sottoinsieme di uno spazio vettoriale è un sottospazio vettoriale.

43. Data una matrice A, saper verificare che l'insieme delle soluzioni di $Ax = 0$ è un sottospazio vettoriale di K^n e saperne determinare una base.

44. Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata. Saper spiegare l'algoritmo.

45. Definizione di insieme di generatori di uno spazio vettoriale, elementi linearmente indipendenti e base di uno spazio vettoriale.

46. Dimostrazione che ogni elemento di uno spazio vettoriale si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di una base. Definizione di coordinate di un vettore rispetto ad una base.

47. Come si estrae una base da un insieme di generatori: enunciato, dimostrazione, saper applicare a casi concreti.

48. Teorema del completamento a base di un insieme linearmente indipendente: saper dimostrare il teorema e saperlo applicare a sottospazi di K^n, di matrici, di polinomi.

49. Saper dimostrare che uno spazio vettoriale di dimensione n non puo' essere generato con meno di n vettori e che presi comunque $n+1$ vettori questi sono necessariamente linearmente dipendenti.

50. Saper spiegare perché il numero di scalini di una matrice non dipende dalla riduzione a scala effettuata. Definizione di rango di una matrice.

51. Definizione di applicazione lineare. Saper verificare che una data funzione è lineare, o mostrare che non lo è.

52. Nucleo di un'applicazione lineare. Dimostrare che $T: V \to W$ lineare è iniettiva $\iff$ $Ker\, T = \{0\}$.

53. Saper dimostrare che una applicazione lineare da uno spazio di dimensione finita a sé stesso è iniettiva se e solo se è surgettiva.

54. Saper definire un'applicazione lineare con un dato nucleo e una data immagine.

55. Saper spiegare perché se due applicazioni lineari $T, S: V \to W$ coincidono su una base di V, allora sono uguali.

56. Dimostrazione della formula della dimensione del nucleo e dell'immagine di un'applicazione lineare.

57. Saper determinare una base dello spazio generato dalle colonne o dalle righe di una matrice. Saper spiegare perchè il rango per riga di una matrice è uguale al rango per colonna.

58. Spiegare come si calcola una base di $U + W$ a partire da una base di U e una base di W.

59. Spiegare come si calcola una base di $U \cap W$ a partire da una base di U e una base di W.

60. Enunciare e dimostrare la formula di Grassmann.

61. Definizione di matrice $[L]$ associata ad un'applicazione lineare L rispetto ad una base. Matrice del cambiamento di base. Come cambia la matrice $[L]$ cambiando base?

62. Saper calcolare il determinante di una matrice 3x3 o 4x4.

63. Saper dire come cambia il determinante di una matrice aggiungendo ad una riga un multiplo di un'altra riga, o moltiplicando una riga per uno scalare, o permutando due righe.

64. Spiegare come calcolare il determinante di una matrice nxn con l'algoritmo di Gauss di riduzione a scala.

65. Definizione di autovettori, autovalori e autospazio. Dimostrare che autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

66. Definizione e proprietà del polinomio caratteristico.

67. Spiegazione dell'algoritmo di diagonalizzazione di una matrice.

68. Definizione di prodotto scalare, e descrizione del procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (e spiegazione di come mai funziona).

69. Definizione di prodotto scalare, e dimostrazione del teorema sulla decomposizione di V come somma diretta di un sottospazio U e del suo ortogonale.

70. Definizione di prodotto scalare e sue proprietà, con esempi.

71. Spiegare come utilizzare i prodotti scalari per trovare le coordinate di un vettore rispetto ad una base ortogonale.