Informatica – Matematica Discreta
A.A. 2008/09 - Primo appello, 1 Giugno 2009

COGNOME: NOME:

NUMERO DI MATRICOLA: CORSO:

- hai a disposizione 3 ore; il punteggio pieno è dato solo se l'esercizio è svolto completamente, in modo chiaro, e se sono chiari i passaggi;
- se un esercizio non viene svolto, scrivi chiaramente sul foglio "esercizio n non svolto".

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 8x \equiv 23 \quad (17) \\ 7x \equiv 12 \quad (24) \end{cases}$$

Soluzione. Dopo qualche calcolo il sistema si riduce a

$$\begin{cases} x \equiv -12 \quad (17) \\ x \equiv 12 \quad (24) \end{cases}$$

Dalla prima otteniamo $x = -12 + 17k$. Mettendola a sistema con la seconda otteniamo $(-12 + 17k) \equiv 12 \quad (24)$, ovvero $17k \equiv 0 \quad (24)$ e quindi $k \equiv 0 \quad (24)$ (in quanto 17 è invertibile modulo 24). Ottengo quindi $k = 24t$. Le soluzioni del sistema sono quindi tutti e soli gli interi della forma $x = -12 + 17(24t)$ al variare di t.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{N}_k = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq k\}$. Per ciascuna delle condizioni sotto elencate, stabilire quante sono le funzioni $f\colon \mathbb{N}_{2n} \to \mathbb{N}_4$ che verificano la condizione.

1. nessuna restrizione;
2. $(\exists x \in \mathbb{N}_{2n} : f(x) = 1) \wedge (\exists y \in \mathbb{N}_{2n} : f(y) = 4)$;
3. $(\exists x \in \mathbb{N}_{2n} : f(x) = 1) \vee (\exists y \in \mathbb{N}_{2n} : f(y) = 4)$;
4. Le controimmagini di 1 sono tante quante quelle di 2, e le controimmagini di 3 sono tante quante quelle di 4.

Soluzione. (1) 4^{2n};
(2) $4^{2n} - 2 \cdot 3^{2n} + 2^{2n}$;
(3) $4^{2n} - 2^{2n}$;
(4) $(2n)!2^n$ $(= \Sigma_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!})$.

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $T^3 = 0, T^2 \neq 0$. Dimostrare che:

- $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Ker}(T^2) \subset \mathrm{Ker}(T^3) = \mathbb{R}^3$.
- $\mathrm{Ker}(T) \neq \mathrm{Ker}(T^2)$ e $\mathrm{Ker}(T^2) \neq \mathrm{Ker}(T^3)$
- T non è diagonalizzabile

Soluzione. Date due applicazioni lineari F, G, il nucleo di G è sempre incluso nel nucleo di $F \circ G$ (in quanto se $G(v) = 0$ allora $F(G(v)) = F(0) = 0$). Applicando il ragionamento a T, $T \circ T$, e $T \circ T \circ T$, otteniamo la prima catena di inclusioni. Per var vedere che le inclusioni sono strette ragioniamo come segue. Visto che $T^2 \neq 0$ esiste almeno un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $T^2(v) \neq 0$, ovvero v non è nel nucleo di T^2. D'altra parte v è sicuramente nel nucleo di T^3 essendo quest'ultima l'applicazione nulla, e quindi il nucleo di T^2 è diverso da quello di T^3. Consideriamo ora il vettore $w := T(v)$. Questo è nel nucleo di T^2, ma non in quello di T, quindi anche questi due nuclei sono diversi. Per l'ultimo punto, osserviamo che se una matrice diagonale T a coefficienti reali verifica $T^3 = 0$ allora deve essere la matrice nulla. D'altra parte la matrice nulla non verifica la condizione $T^2 \neq 0$, quindi il terzo punto è dimostrato per matrici diagonali. Se ne deduce facilmente che la stessa conclusione vale per matrici diagonalizzabili. Infatti se T è diagonalizzabile esiste una matrice diagonale T' della forma $M^{-1}TM$. Se T verifica le condizioni $T^3 = 0, T^2 \neq 0$, anche T' le dove verificare. Ma ciò non è possibile in quanto T' è diagonale.

Esercizio 4. Si consideri la matrice A_x, dove x è una variabile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare il determinante di A_x
2. Per quali valori della variabile x la matrice A_x non è invertibile?

Soluzione. Si tratta di una matrice di Vandermonde, ovvero di una matrice che ha i coefficienti sulle righe in progressione geometrica a partire da 1. Il determinante di una matrice di Vandermonde è la produttoria di tutte le differenze tra i coefficienti della seconda colonna, ovvero nel nostro caso $(2-1)(2+1)(2+2)(2-x)(1+1)(1+2)(1-x)(-1+2)(-1-x)(-2-x)$. Le radici sono $2, 1, -1, -2$. Per questi quattro valori il determinante è nullo e la matrice non è invertibile.