Informatica – Matematica Discreta

A.A. 2008/09 - Secondo appello, 23 Giugno 2009

COGNOME: NOME:

NUMERO DI MATRICOLA: CORSO:

- hai a disposizione 3 ore; il punteggio pieno è dato solo se l'esercizio è svolto completamente, in modo chiaro, e se sono chiari i passaggi;
- se un esercizio non viene svolto, scrivi chiaramente sul foglio "esercizio n non svolto".

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che, per ogni intero positivo k, il numero

$$a_k = \frac{(2k)!}{k!\,2^k}$$

è un intero ed è dispari.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti condizioni stabilire in quanti modi si possono colorare le caselle di una scacchiera 3×3 in modo che ogni casella sia bianca o nera e valga la condizione:

1. Nessuna restrizione;
2. Ogni riga è colorata in modo diverso;
3. C'è una e una sola riga tutta bianca;
4. C'è almeno una riga tutta dello stesso colore.

Esercizio 3. Al variare dei parametri razionali a e b si discuta la risolubilità e il numero di soluzioni del sistema lineare seguente.

$$\begin{cases} x & & -z & +at & = & 1 \\ 2x & +y & +az & & = & 0 \\ 2x & & -2z & +4t & = & b \\ -2x & -y & +z & & = & 1 \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione lineare non nulla e sia $v_0 \neq 0$ un vettore fissato. Si consideri l'applicazione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cosí definita:
$T(v) = v + f(v)v_0$

1. Provare che T è lineare.
2. Provare che v_0 è autovettore e calcolarne l'autovalore λ_0.
3. Dimostrare che 1 è autovalore di T e calcolarne la dimensione.
4. Provare che T è diagonalizzabile se e solo se $\lambda_0 \neq 1$.