1 Il teorema di Scott

Un classico teorema di Cantor afferma che due ordini lineari densi senza nè primo nè ultimo elemento sono isomorfi. Dimostreremo in questa sezione un teorema di Scott che generalizza questo risultato ad L-strutture, dove L è un linguaggio del primo ordine.

1 Definizione. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due L-strutture con domini A e B rispettivamente. Sia $\sim$ una relazione binaria il cui primo argomento è una successione di lunghezza finita della forma $(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n)$ dove gli a_i appartengono ad A, e il secondo argomento è una successione della stessa lunghezza della forma $(\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n)$ dove i b_i sono in $\mathcal{B}$. Diciamo che $\sim$ è una relazione di va e vieni infinito se:

1. $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \sim \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$ implica $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \sim_0 \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$, dove quest'ultima relazione significa che la sottostruttura di $\mathcal{A}$ generata da $a_1, \dots, a_n$ è isomorfa alla sottostruttura di $\mathcal{B}$ generata $b_1, \dots, b_n$ tramite un isomorfismo che manda a_i in b_i. Ammettiamo anche caso $n = 0$, convenendo che $\mathcal{A} \sim_0 \mathcal{B}$ significa che le sottostrutture generate dai simboli di costante siano isomorfe (e supponendo che la condizione valga vacuamente se il linguaggio non contiene simboli di costante).

2. Se $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \sim \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$ allora valgono le seguenti due condizioni, dette condizioni di *va e vieni infinito*:

   - $\forall a \in A \exists b \in B, \mathcal{A}, a_1, \dots, a_n, a \sim \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n, b$;
   - $\forall b \in B \exists a \in A, \mathcal{A}, a_1, \dots, a_n, a \sim \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n, b$.

2 Definizione. Diciamo che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono ∞-equivalenti, e scriviamo $\mathcal{A} \sim_\infty \mathcal{B}$, se e solo se esiste una relazione $\sim$ che gode della proprietà richieste nella Definizione 1 e tale che $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$. Analogamente $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \sim_\infty \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$ se e solo se esiste una relazione di va e vieni infinito $\sim$ tale che $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \sim \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$.

Osserviamo che $\sim_\infty$ è essa stessa una relazione di va e vieni infinito, ed è in effetti la più grande di tutte le relazioni di va e vieni infinito, essendo, per definizione, l'unione di tutte.

3 Teorema. *(Teorema di Scott) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ L-strutture finite o numerabili e tali che $\mathcal{A} \sim_\infty \mathcal{B}$, allora $\mathcal{A}$ è isomorfa a $\mathcal{B}$. Più in generale se $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \sim_\infty \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$ allora $\mathcal{A}$ è isomorfa a $\mathcal{B}$ tramite un isomorfismo che manda a_i in b_i (gli a_i non sono necessariamente distinti, ma se $a_i = a_j$ si deve chiaramente avere $b_i = b_j$).*

Proof. Sia $\sim$ una relazione che gode della proprietà del va e vieni infinito e tale che $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \sim \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$. L'idea è di usare ripetutamente la condizione di va e vieni infinito per prolungare le successioni $(a_1, \dots, a_n)$ e $(b_1, \dots, b_n)$ ottenendo due successioni numerabili $(a_i \mid i \in \mathbb{N})$ e $(b_i \mid i \in \mathbb{N})$ tali che per ogni m si abbia $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_m \sim \mathcal{B}, b_1, \dots, b_m$. Una volta fatto ciò, in base al primo punto nella condizione del va e vieni, ne segue che la corrispondenza che associa a_i a b_i è una funzione che stabilisce un isomorfismo tra la sottostruttura generata da $a_1, \dots, a_m$ in $\mathcal{A}$ e quella generata da $b_1, \dots, b_m$ in $\mathcal{B}$, e visto che questo vale per ogni m si ha in effetti un isomorfismo tra la sottostruttura generata da $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{A}$ e quella generata da $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{B}$. Avremmo quindi finito se riuscissimo ad assicurarci che gli a_i esauriscono tutto $\mathcal{A}$ e i b_i esauriscono $\mathcal{B}$. Questo obiettivo può essere raggiunto come segue. Visto che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono numerabili, possiamo scrivere $A = \{u_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Scegliamo ora induttivamente gli a_i e i b_i nel modo seguente $(i > n)$. Se i è pari scegliamo $a_i = u_i$ e usando la condizione del va e vieni scegliamo poi un qualsiasi $b \in B$ in modo che, ponendo $b_i = b$, valga $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_i \sim \mathcal{B}, b_1, \dots, b_i$ (supponiamo induttivamente che questa condizione valga per valori inferiori di i). Se i è dispari scegliamo $b_i = v_i$ e procediamo simmetricamente. Questa scelta verifica le nostre richieste. $\square$

4 Teorema. *Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ due ordini lineari densi e senza estremi (massimo o minimo). Allora $\mathcal{A} \sim_\infty \mathcal{B}$. (Quindi se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono numerabili, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.)*

Proof. Poniamo $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \sim \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$ se si ha, per ogni i, j tra 1 ed n, $a_i \leq a_j \leftrightarrow b_i \leq b_j$ (questa condizione vale vacuamente se $n = 0$, e per $n > 0$ equivale a dire che $a_i \mapsto b_i$ è un isomorfismo d'ordine tra $\{a_i \mid \leq i \leq n\}$ e $\{b_i \mid 1 \leq i \leq n\}$). Dobbiamo verificare che la relazione $\sim$ così definita verifica le condizioni della definizione 1. Il primo punto è ovvio in quanto $\sim$ in questo caso coincide con $\sim_0$. Le due condizioni del va e vieni infinito si verificano facilmente: l'isomorfismo $a_i \mapsto b_i$ tra le sottostrutture $\{a_i \mid \leq i \leq n\}$ e $\{b_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ si può estendere con l'aggiunta di un elemento arbitrario ad una delle due sottostrutture usando, per trovare un elemento corrispondente da aggiungere all'altra struttura, la densità e l'assenza di estremi di $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$. $\square$

5 Corollario. *(Cantor) Un ordine lineare $\mathcal{A} = (A, <_A)$ numerabile, denso, e senza estremi (massimo o minimo) è isomorfo all'ordine dei numeri razionali $(\mathbb{Q}, <)$.*

Ne segue ad esempio che esiste un isomorfismo d'ordine tra i numeri reali algebrici e i numeri razionali, oppure tra i razionali e i razionali diadici (quelli con denominatore della forma 2^n). Il teorema di Cantor non vale per ordini più che numerabili. Ad esempio i reali, come struttura ordinata, non sono isomorfi ai reali privati dello zero (una delle due strutture è completa nel senso di Dedekind e l'altra no), nonostante le due strutture siano ordini densi senza estremi della stessa cardinalità.

Ricordiamo il seguente:

6 Teorema. *Una teoria in un linguaggio numerabile che non abbia modelli finiti e sia $\aleph_0$-categorica (ciò tutti i suoi modelli numerabili sono isomorfi) è completa.*

7 Corollario. *La teoria degli ordini densi senza estremi è completa.*

8 Corollario. *La teoria degli ordini densi senza estremi è decidibile.*

Proof. Questo segue dalla completezza della teoria e dal fatto che l'insieme degli assiomi è ricorsivo (addirittura finito). □

Vedremo nel seguito tecniche più generali per mostrare che una teoria è completa che si basano sullo studio di una relazione $\sim_\omega$ più debole della relazione $\sim_\infty$.

2 Giochi di Erenfeucht

Sia L la segnatura di un linguaggio del primo ordine.

9 Definizione. (Fraïssé)

Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due L-strutture con domini A e B rispettivamente, e siano $a_1, \ldots, a_n$ elementi di A e $b_1, \ldots, b_n$ elementi di B. Definiamo per induzione su k la relazione $\sim_k$ ($\sim_0$ era già stata precedentemente definita ma per completezza ripetiamo la definizione):

1. $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_0 \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ se e solo se la sottostruttura di $\mathcal{A}$ generata da $a_1, \ldots, a_n$ è isomorfa alla sottostruttura di $\mathcal{B}$ generata $b_1, \ldots, b_n$ tramite un isomorfismo che manda a_i in b_i.

2. $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_{k+1} \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ se e solo se valgono le seguenti due condizioni, dette condizioni di *va e vieni*,

   - $\forall a \in A \exists b \in B, \mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n, a \sim_k \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n, b$;
   - $\forall b \in B \exists a \in A, \mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n, a \sim_k \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n, b$.

Ammettiamo anche caso $n = k = 0$, convenendo che $\mathcal{A} \sim_0 \mathcal{B}$ significa che le sottostrutture generate dai simboli di costante siano isomorfe (e supponendo che la condizione valga vacuamente se il linguaggio non contiene simboli di costante).

10 Definizione. $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_\omega \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ se per ogni k vale $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_k \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$.

Il significato intuitivo di queste definizioni può essere chiarito dando una caratterizzazione della relazione $\sim_k$ in termini di giochi.

11 Definizione. (Giochi di Erhenfeucht) Date due L-strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ ed un numero naturale k (la lunghezza del gioco) consideriamo un gioco $G(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$, detto gioco di Ehrenfeucht, in cui i giocatori scelgono a turno elementi delle strutture con i seguenti vincoli. Ad ogni turno il primo giocatore sceglie una delle due strutture (non necessariamente sempre la stessa nei vari turni di gioco) ed un elemento di quella struttura, mentre il secondo giocatore risponde scegliendo un elemento dall'altra struttura. Dopo m turni sarà stata scelta una successione di m elementi (non necessariamente distinti) di A e una successione di m elementi da B. Scopo del secondo giocatore è quello di cercare di "copiare" le mosse del primo giocatore, ovvero cercare di fare le sue mosse in modo tale che la corrispondenza che associa ad ogni elemento scelto da un giocatore l'elemento scelto dall'altro giocatore durante lo stesso turno, è un isomorfismo tra le sottostrutture di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ generate da questi elementi. Se il secondo giocatore riesce a copiare per almeno k turni vince, in caso contrario perde.

Il gioco di Ehrenfeucht $G(\langle\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n\rangle, \langle\mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n\rangle, k)$ è definito come sopra salvo che si parte dalla posizione iniziale $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n$ e $\mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ anziché da $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Una strategia per un giocatore può essere formalmente definita come una funzione che indica la mossa da fare in dipendenza della successione delle precedenti mosse di entrambi giocatori, e una strategia vincente è una strategia che conduce con certezza alla vittoria indipendentemente dalle mosse dell'avversario.

12 Proposizione. *Vale $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_k \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ se e solo se il secondo giocatore ha una strategia vincente per il gioco di Erhenfeucth a k mosse a partire dalla posizione iniziale $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n$ e $\mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$.*

Proof. Osserviamo che il secondo giocatore ha una strategia vincente per il gioco di lunghezza $k+1$ a partire dalla data posizione iniziale se e solo se, per ogni mossa dell'avversario (ovvero per ogni elemento preso da A o da B), esiste una sua contromossa (ovvero un elemento preso dall'altra struttura) ed una strategia vincente per le rimanenti k mosse a partire dalla nuova posizione (consistente di una lista di $n+1$ elementi da A e $n+1$ elementi da B). La nostra tesi segue ora facilmente per induzione su k applicando le definizioni. □

13 Esercizio. $(\mathbb{R}, \leq) \not\sim_3 (\mathbb{Z}, \leq)$

Sempre in termini di giochi possiamo caratterizzare $\sim_\omega$ e ∞, mostrando nel contempo la differenza tra queste due relazioni.

14 Osservazione. Innanzitutto osserviamo che, per quanto sopra detto, vale $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_\omega \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ se e solo se per ogni k il secondo giocatore ha una strategia vincente (che in generala dipenderà dalla conoscenza della lunghezza k del gioco) per il gioco di Erenfeucht di lunghezza k a partire dalla posizione iniziale $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n$ e $\mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$. Si noti che i giochi considerati non sono di lunghezza "ω", ma pur sempre di lunghezza finita. La situazione cambia se cerchiamo di caratterizzare la relazione $\sim_\infty$. Una condizione necessaria e sufficiente affinché valga $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_\infty \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ è che il secondo giocatore abbia una strategia che gli permette di continuare a "copiare" indefinitamente le mosse del primo giocatore senza conoscere in anticipo la durata del gioco, e quindi gli permette di continuare a copiare anche se il gioco andasse avanti per infiniti turni di gioco. Per la necessità della condizione basta osservare che il mantenimento della relazione $\sim_\infty$ fornisce al secondo giocatore una strategia per copiare indefinitamente, mentre per la sufficienza notiamo che la relazione che asserisce l'esistenza di una strategia che permette di copiare indefinitamente a partire dalla posizione data gode delle proprietà richieste dalla Definizione 1.

15 Corollario. *$\sim_\infty$ implica $\sim_\omega$, ovvero se vale la relazione $\sim_\infty$ tra $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n$ e $\mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$, allora vale anche la relazione $\sim_\omega$.*

Proof. Se il secondo giocatore ha una strategia che gli permette di continuare a copiare per infiniti turni di gioco, a maggior ragione ne ha una (la stessa) per il gioco di lunghezza k. Il lettore potrà dare una dimostrazione più formale basata direttamente sulle definizioni. □

16 Esempio. $(\mathbb{Q}, \leq) \sim_i nfty(\mathbb{R}, \leq)$, e quindi anche $(\mathbb{Q}, \leq) \sim_\omega (\mathbb{R}, \leq)$.

17 Esempio. Sia $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ l'ordine totale che si ottiene giustapponendo due copie disgiunte di $\mathbb{Z}$ (considerato come struttura ordinata), con la convenzione che ogni elemento della seconda copia sia maggiore di ciascun elemento della prima copia. Allora $\mathbb{Z}+\mathbb{Z} \sim_\omega \mathbb{Z}$, ma $\mathbb{Z}+\mathbb{Z} \not\sim_\infty \mathbb{Z}$.

3 Ordini discreti

18 Definizione. (Ordini discreti) Un ordine discreto senza estremi è un ordine lineare $(A, \leq)$ tale che ogni elemento ha un successore immediato e un predecessore immediato nel senso seguente. Un successore immediato di x è un elemento $y > x$ tale che non vi è alcun elemento strettamente compreso tra x e y. Diciamo in tal caso che y è un predecessore immediato di x.

Un esempio di ordine discreto è $(\mathbb{Z}, \leq)$. Altri esempi si possono ottenere come segue.

19 Definizione. Dati due ordini totali $\mathcal{A} = (A, <_A)$ e $\mathcal{B} = (B, <_B)$ definiamo $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ come l'ordine totale che si ottiene come segue. Se A e B sono disgiunti prendiamo come dominio l'unione di A e B e lo ordiniamo come segue: tutti gli elementi di A sono minori di ciascuno degli elementi di B, e all'interno di A e B si mantiene l'ordine iniziale $<_A$ e $<_B$ rispettivamente. Nel caso in cui A e B non siano necessariamente disgiunti, ci si riconduce al caso in cui lo siano rimpiazzando A con $A \times \{0\}$ (ordinato ponendo $(a, 0) < (a', 0)$ se $a < a'$) e B con $B \times \{1\}$ (ordinato ponendo $(b, 1) < (b', 0)$ se $b < b'$).

20 Proposizione. *Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono ordini discreti, anche $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ lo é.*

21 Definizione. Definiamo il prodotto lessicografico $A \times B$ di due ordini totali A, B come segue: gli elementi di $A \times B$ sono coppie (a, b) con $a \in A, b \in B$. L'ordine è definito da: $(a, b) < (a', b')$ se e solo se $a < a'$ oppure $a = a'$ e $b < b'$ (dove $a < a'$ significa minore nel senso di A, e $b < b'$ indica il minore nel senso di B).

22 Proposizione. *Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono ordini discreti, anche $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ lo é.*

23 Lemma. *Siano $\mathcal{A} = (A, \leq_A)$ e $\mathcal{B} = (B, \leq_B)$ due ordini discreti e siano $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $b_1, \ldots, b_n \in B$. Condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_k \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ è che per ogni i, con $1 \leq i < n$, i due insiemi $\{x \in A \mid a_i < x < a_{i+1}\}$ e $\{x \in B \mid b_i < x < b_{i+1}\}$ abbiano lo stesso numero di elementi, oppure abbiano entrambi più di $2^k - 1$ elementi (comprendendo il caso in cui vi siano infiniti elementi). Questa condizione vale vacuamente per $n = 0$, e pertanto si ha $\mathcal{A} \sim_k \mathcal{B}$.*

Proof. Chiamiamo $\sim_k^*$ la condizione sopra definita, di cui vogliamo dimostrare l'equivalenza con $\sim_k$. □

24 Teorema. *Siano $\mathcal{A} = (A, \leq_A)$ e $\mathcal{B} = (B, \leq_B)$ due ordini discreti (ad esempio $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ e $\mathcal{B} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$). Allora $\mathcal{A} \sim_o mega\mathcal{B}$.*

Proof. Segue dal precedente Lemma con $k = 0$.

□

4 Il teorema di Fraïssé

Il teorema di Fraissè fornisce una caratterizzazione della equivalenza elementare di due L-strutture. Questo può servire a dimostrare che una teoria è completa, ricordando che una teoria è completa se e solo se tutti i suoi modelli sono elementarmente equivalenti. Questa tecnica per dimostrare la completezza è più generale di quella fornita dal teorema di Scott, che si applica solo alle teorie $\aleph_0$-categoriche.

25 Definizione. Una L-struttura $\mathcal{A}$ si dice **elementarmente equivalente** ad una L-struttura $\mathcal{B}$ (e si indica con $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$) se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ verificano gli stessi L-enunciati. Più in generale, dati $a_1, \ldots, a_n$ nel dominio di $\mathcal{A}$ e $b_1, \ldots, b_n$ nel dominio di $\mathcal{B}$, diciamo che $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$, se e solo se per ogni L-formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ (con variabili libere incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$), vale $\mathcal{A} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $\mathcal{B} \models \phi(b_1, \ldots, b_n)$. Questo equivale a dire che se ampliamo il linguaggio L con un insieme C di nuovi simboli di costante $c_1, \ldots, c_n$ abbiamo la elementare equivalenza delle $(L \cup C)$-strutture $(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)$ (definita come l'espansione di $\mathcal{A}$ ottenuta interpretando c_i con a_i) e $(\mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n)$ (definita analogamente).

26 Esempio.

1. $(\mathbb{Q}, \leq) \not\equiv (\mathbb{Z}, \leq)$, in quanto la densità dell'ordine è esprimibile con un enunciato del linguaggio.
2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq) \not\equiv (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, in quanto l'esistenza della radice quadrata di 2 è esprimibile con un enunciato del linguaggio.
3. Dimostreremo che $(\mathbb{Q}, \leq) \equiv (\mathbb{R}, \leq)$

Mostreremo che, se la segnatura L è finita, si ha $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se e solo se $\mathcal{A} \sim_\omega \mathcal{B}$. In altre parole due strutture sono elementarmente equivalenti se per ogni k il secondo giocatore ha una strategia vincente per il gioco di lunghezza k. Per dimostrarlo abbiamo bisogno di un risultato più preciso che caratterizza $\sim_k$ per un fissato k.

27 Definizione. Definiamo il **rango di quantificazione** di una L-formula φ, e lo indichiamo con $RQ(\varphi)$, induttivamente nel modo seguente:

1. Se φ è una formula atomica allora $RQ(\varphi) = 0$

2. $RQ(\varphi \wedge \psi) = \max\{RQ(\varphi), RQ(\psi)\} = RQ(\varphi \vee \psi)$
3. $RQ(\neg\varphi) = RQ(\varphi)$
4. $RQ(\forall x\varphi) = RQ(\exists x\varphi) = 1 + RQ(\varphi)$

28 Definizione. $\mathcal{A}, a_1, \cdots, a_n \equiv_k \mathcal{B}, b_1, \cdots, b_n$ se e solo se per ogni formula $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ con $RQ(\varphi) \leq p$ si ha: $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ se e solo se $\mathcal{B} \models \varphi(b_1, \cdots, b_n)$.

29 Lemma. *Se* $A, a_1, \cdots, a_n \sim_k B, b_1, \cdots, b_n$*, allora* $\mathcal{A}, a_1, \cdots, a_n \equiv_k \mathcal{B}, b_1, \cdots, b_n$*.*

Proof. Per la dimostrazione si procede per induzione su k.

Per $k = 0$ basta osservare che un isomorfismo tra le due sottostrutture generate dagli a_i e dai b_i preserva tutte le proprietà esprimibili con formule del linguaggio, e che nel caso le formule siano atomiche non ha importanza se intepretiamo le formule nelle sottostrutture in questione oppure direttamente nelle strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Sia ora $k > 0$ e supponiamo che $A, a_1, \cdots, a_n \sim_k B, b_1, \cdots, b_n$. Sia $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una formula di rango k. Dobbiamo mostrare che $A \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ se e solo se $B \models \varphi(b_1, \cdots, b_n)$. A tal fine ragioniamo per induzione secondaria sul numero dei connettivi della formula. Se φ è ottenuta per negazione, disgiunzione o congiunzione da formule più semplici, la verifica è immediata.

Possiamo dunque supporre che φ cominci con un quantificatore. Usando l'equivalenza tra $\forall xP$ e $\neg\exists x\neg P$, possiamo inoltre limitarci a trattare il caso del quantificatore esistenziale. Supponiamo dunque che $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sia della forma $\exists y\theta(y, x_1, \ldots, x_n)$, e che $\mathcal{A} \models \exists y\theta(y, a_1, \ldots, a_n)$ (analogamente si tratta il caso corrispondente con i ruoli di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ scambiati). Sia $a \in A$ un testimone del quantificatore esistenziale, ovvero un elemento che verifica $\mathcal{A} \models \theta(a, a_1, \ldots, a_n)$. Poiché stiamo supponendo che $\mathcal{A}, a_1, \cdots, a_n \sim_k \mathcal{B}, b_1, \cdots, b_n$, in corrispondenza di $a \in A$ deve esistere un $b \in B$ tale che $\mathcal{A}, a_1, \cdots, a_n, a \sim_{k-1} \mathcal{B}, b_1, \cdots, b_n, b$. Dunque per l'ipotesi induttiva abbiamo $\mathcal{A}, a_1, \cdots, a_n, a \equiv_{k-1} \mathcal{B}, b_1, \cdots, b_n, b$. Visto che θ ha rango $k - 1$, e vale $\mathcal{A} \models \theta(a, a_1, \ldots, a_n)$, possiamo concludere $\mathcal{B} \models \theta(b, b_1, \ldots, b_n)$, e quindi $\mathcal{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$,

□

30 Teorema (Fraïssé)**.** *Se* $\mathcal{A} \sim_\omega \mathcal{B}$ *allora* $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$*. Più in generale se* $A, a_1, \cdots, a_n \sim_\omega B, b_1, \cdots, b_n$*, allora* $A, a_1, \cdots, a_n \equiv B, b_1, \cdots, b_n$*.*

Se il linguaggio è finito e non contiene simboli di funzione, nel Lemma 29 e nel Teorema 30 vala la doppia implicazione, ovvero $\sim_k$ equivale a $\equiv_k$ e $\sim_\omega$ equivale a $\equiv$. Nel seguito daremo un cenno della dimostrazione di questo fatto.

5 L'inverso del teorema di Fraïssé

31 Definizione. Se $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_k \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ diciamo che $(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)$ e $(\mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n)$ appartengono alla stessa classe di $(\sim_k)$-equivalenza di n-uple.

32 Proposizione. *Dati n e k ci sono solo un numero finito $C(k, n) \in \mathbb{N}$ di classi di $(\sim_k)$-equivalenza di n-uple e vale la relazione $C(k + 1, n) \leq 2^{C(k,n+1)}$. Inoltre per ogni classe di $(\sim_k)$-equivalenza di n-uple esiste una formula $\phi_C(x_1, \ldots, x_n)$, di rango k, che caratterizza la classe, nel senso che per ogni $(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)$ si ha che $(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n) \in C$ se e solo se $\mathcal{A} \models \varphi_C(a_1, \ldots, a_n)$.*

Proof. Per induzione su k.

Per $k = 0$ osserviamo che due n-uple appartengono alla stessa $(\sim_k)$-classe se e solo se verificano le stesse formule atomiche (infatti questo equivale a dire che generano sottostrutture isomorfe). Nelle nostre ipotesi sul linguaggio ci sono un numero finito $r \in \mathbb{N}$ di formule atomiche con variabili libere incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Questo ci permette di concludere che la $(\sim_0)$-classe di equivalenza di $(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)$ è caratterizzata dalla congiunzione delle seguenti formule: le formule atomiche $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ verificate da $a_1, \ldots, a_n$ e le negazioni delle formule atomiche non verificate da $a_1, \ldots, a_n$.

Supponiamo ora che la tesi valga per un dato k (e per ogni n) e dimostriamola per $k + 1$. Per dimostrare il caso $(k + 1, n)$ useremo il caso $(k, n + 1)$.

Sappiamo per ipotesi induttiva che per ogni classe H di $(\sim_k)$-equivalenza di $n+1$-uple esiste una formula $\varphi_H(x_1, \ldots, x_{n+1})$ di rango k che caratterizza la classe. Inoltre l'insieme I delle possibili H ha cardinalità $C(k, n+1)$. Dato un sottoinsieme $\delta \subseteq I$, definiamo $\varphi_\delta(x_1, \cdots, x_n)$ come la formula

$$\bigwedge_{H \in \delta} \exists x_{n+1} \varphi_H(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \wedge \bigwedge_{H' \notin \delta} \neg \exists x_{n+1} \varphi_{H'}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}).$$

Al variare di δ tra tutti i sottoinsiemi di I, si ottengono in questo modo $2^{C(k,n+1)}$ formule φ_δ. Alcune di queste formule possono essere inconsistenti e le scartiamo. Le altre descrivono tutte le possibili classi di $(\sim_{k+1})$-equivalenza di n-uple. La verifica è lasciata per esercizio.

$\square$

33 Corollario. *In un linguaggio finito senza simboli di funzione ci sono, a meno di equivalenza logica, un numero finito di formule con variabili libere incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e rango di quantificazione $\leq k$. Ognuna di tali formule equivale ad una disgiunzione delle formule sopra costruite (quelle che implicano la formula data).*

34 Corollario. *Se il linguaggio è finito e non ha simboli di funzione, nel Lemma 29 e nel teorema 30 vale la doppia implicazione.*

Il seguente esempio mostra la necessità delle ipotesi fatte sul linguaggio.

35 Esempio. Il linguaggio di $(\mathbb{N}, s, 0)$ ha infinite formule di rango 0 non equivalenti. Ad esempio le formule $y = s^n(x)$, dove s^n indica la composizione di s con se stessa n volte, sono non equivalenti tra loro e hanno tutte rango 0.

6 Esempi

7 Ultraprodotti e Compattezza

7.1 prodotti

Prima di considerare gli ultraprodotti diamo la definizione di prodotto diretto di una famiglia possibilmente infinita di L-strutture.

36 Definizione. (Prodotti diretti di L-strutture) Siano $\mathcal{A}_i$, per $i \in I$, L-strutture. Il prodotto diretto $\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i$ è la L-struttura il cui dominio è formato dall'insieme di tutte le "I-uple" $a = \langle a(i) \mid i \in I \rangle$ tali che, per ogni $i \in I$, la i-esima coordinata $a(i)$ appartiene ad A_i. Le operazioni e le relazioni sono definite termine a termine: ad esempio se il liguaggio comprende una operazione binaria $+$ e una relazione binaria $<$, allora $a + b = c$ se e solo se $\forall i \in I, a(i) + b(i) = c(i)$, e $a < b$ se e solo se $\forall i \in I, a(i) < b(i)$.

Il prodotto diretto di strutture preserva alcune proprietà delle strutture ma non altre. Ad esempio il prodotto diretto di gruppi è un gruppo, ma il prodotto diretto di campi, pur essendo un anello, non è un campo in quanto esistono degli elementi non invertibili diversi dallo zero. Ad esempio nel prodotto di due campi lo zero (l'elemento neutro per l'addizione) è la coppia $(0, 0)$, mentre la coppia $(0, 1)$ è un elemento diverso dallo zero che tuttavia non ha un inverso moltiplicativo in quanto $(0, 1) \cdot (1, 0) = (0, 0)$.

37 Esercizio. L'insieme dei modelli di una teoria assiomatizzata da assiomi universali (ad esempio i gruppi), è stabile per prodotti diretti.

Definiremo nel seguito degli opportuni quozienti dei prodotti diretti, gli ultraprodotti, in cui sono preservate tutte le proprietà esprimibili al primo ordine: quindi un ultraprodotto di campi sarà un campo.

L'ultraprodotto è un quoziente $\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i / U$ rispetto ad una certa relazione di equivalenza che dipende da un "ultrafiltro" U. L'idea è di identificare due I-uple del prodotto $\Pi_{i \in I} A_i$ che differiscono su un insieme di indici "grande", dove "grande" significa "appartenente ad U". Per formalizzare questa idea cominciamo con il dare la definizione di ultrafiltro.

7.2 Filtri e ultrafiltri

38 Definizione. Sia U un insieme non vuoto di sottoinsiemi di I. Diciamo che U è un filtro se soddisfa le proprietà:

1. $\emptyset \notin U$;
2. $A \in U$ e $B \supseteq A$, implica $B \in U$.
3. $A \in U$ e $B \in U$, implica $A \cap B \in U$.

   Se inoltre vale anche la:

4. Per ogni $A \subseteq I$ esattamente uno dei due insiemi A ed $I \setminus A$ appartiene ad U.

   allora diciamo che U è un *ultrafiltro.*

Se valgono la (2) e la (3) ma non la (1), allora U contiene necessariamente
tutti i sottoinsiemi di I e viene chiamato il *filtro improprio.* Un filtro U si dice *principale* se e solo se esso consiste di tutti e soli gli insiemi che contengono un dato insieme $A \subseteq I$, e diciamo i tal caso che A genera U.

Più interessanti sono i filtri non principali. Un esempio è il *filtro di Frechét* dato da tutti i sottoinsiemi di I il cui complemento è finito (assumiamo I infinito).

Consideriamo ora il caso degli ultrafiltri. Se U è un ultrafiltro principale generato da $A \subseteq I$, è facile vedere che A deve consistere di un unico elemento (se no potrei scrivere A come unione di due sottoinsiemi non vuoti disgiunti e uno dei due dovrebbe appartenere ad U). Quindi gli ultrafiltri principali sono tutti e soli quelli della forma $\{A \subseteq I \mid x \in A\}$ dove x è un elemento di I. Analoghi ragionamenti mostrano che se I è un insieme finito, tutti gli ultrafiltri su I sono principali. A noi interesseranno soprattutto gli ultrafiltri non principali perché solo in quel caso l'ultraprodotto $\Pi_{i\in I} A_i/U$ può fornire strutture "nuove", ovvero non isomorfe ad alcuno degli A_i. Tuttavia non è possibile dare un esempio esplicito di ultrafiltro non principale. Potremo solo dimostrare in modo non costruttivo l'esistenza di tali ultrafiltri.

Mostriamo ora che gli insiemi appartenenti ad un ultrafiltro U sono gli insiemi "grandi" rispetto ad una opportuna misura finitamente additiva m_U.

39 Definizione. (Misura associata ad un ultrafiltro) Dato un ultrafiltro U su I, definiamo $m_U : \mathcal{P}(I) \to \{0, 1\}$ (dove $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ è l'insieme delle parti di I) ponendo $m_U(X) = 1$ se e solo se $X \in U$.

40 Proposizione. *m_U è una misura a due valori finitamente additiva, cioè m_U fornisce misura 0 all'insieme vuoto, misura 1 ad I, e se X, Y sono disgiunti $m_U(X \cup Y) = m_U(X) + m_U(Y)$.*

Proof. Per verificare l'ultima affermazione osserviamo che la somma non può essere uguale a due, perchè due insiemi di misura 1 non possono essere disgiunti (la loro intersezione ha ancora misura 1). Ci sono quindi solo tre casi da verificare a seconda che X, Y abbiano misure $(0, 0)$ o $(0, 1)$ o $(1, 0)$.

Se X ha misura 1 (cioè $X \in U$) anche $X \cup Y$ ha misura uno perchè se U contiene un insieme contiene tutti gli insiemi che lo includono.

Resta da verificare che se X, Y hanno misura zero, anche la loro unione $X \cup Y$ ha misura zero, cioè $I \setminus (X \cup Y) \in U$. Poiché U è un ultrafiltro, il complemento di X e quello di Y sono in U, e quindi anche la loro intersezione $(I \setminus X) \cap (I \setminus Y)$ è in U, ovvero $I \setminus (X \cup Y) \in U$ come desiderato (si osservi che in questo caso non abbiamo usato il fatto che X, Y sono disgiunti). □

41 Corollario. *Se $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ appartiene ad un ultrafiltro U, allora almeno uno degli X_i appartiene ad U. Se inoltre gli X_i sono disgiunti, esattamente uno degli X_i appartiene ad U.*

La misura m_U associata ad un ultrafiltro principale $U = \{A \subseteq I \mid x \in A\}$ fornisce misura 1 agli insiemi che contengono x e misura 0 agli altri. Noi siamo interessati soprattutto agli ultrafiltri non principali, quelli cioè che assegnano misura 0 agli insiemi con un solo elemento, e quindi a tutti gli insiemi finiti (per la finita additività di m_U). Le seguenti definizioni e risultati servono a mostrare l'esistenza di ultrafiltri non principali.

42 Definizione. Una collezione U di sottoinsiemi di I è una *prebase* o ha la proprietà dell'intersezione finita (*fip*) se l'intersezione di un numero finito di elementi di U è sempre non vuota.

43 Proposizione. *Ogni prebase si estende a un filtro.*

Proof. Sia $\mathcal{B}$ una prebase. Se $\mathcal{F}$ è un filtro che contiene $\mathcal{B}$, allora $\mathcal{F}$ deve contenere tutte le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$, e tutti gli insiemi che includono queste intersezioni finite. È ragionevole quindi definire:

$$\mathcal{F} = \{Y \subseteq I \mid \exists n \in \omega \exists X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{B} \text{ con } Y \supseteq X_1 \cap \ldots \cap X_n\}$$

Se $\mathcal{F}$ fosse un filtro, sarebbe sicuramente il più piccolo filtro che contiene $\mathcal{B}$. Verifichiamo che è in effetti un filtro. Se $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$, allora Y_1 include una intersezione finita $X_1 \cap \ldots \cap X_n$ di elementi di $\mathcal{B}$ e Y_2 include una intersezione finita $X'_1 \cap \ldots \cap X'_m$ di elementi di $\mathcal{B}$. Ma allora $Y_1 \cap Y_2$ include $X_1 \cap \ldots \cap X_n \cap X'_1 \cap \ldots \cap X'_m$ e quindi $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{F}$. Abbiamo così verificato che $\mathcal{F}$ è chiuso per intersezioni finite. Ne segue ora facilmente che $\mathcal{F}$ è un filtro. □

44 Proposizione. *Se $\mathcal{F}$ è un filtro, e $I \setminus A \notin \mathcal{F}$, allora $\mathcal{F} \cup \{A\}$ è una prebase.*

Proof. Se non lo fosse, esisterebbero $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{F}$ tali che $X_1 \cap \ldots X_n \cap A = \emptyset$. Ne segue $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq I \setminus A$ e otteniamo la contraddizione $I \setminus A \in \mathcal{F}$. □

45 Proposizione. *$\mathcal{F}$ è un ultrafiltro se e solo se è un filtro massimale (cioè non esiste alcun filtro che lo include strettamente)*

Proof. Sia $\mathcal{F}$ un filtro massimale. Se non è un ultrafiltro, esiste $A \subseteq I$ tale che $A \notin \mathcal{F}$ e $I \setminus A \notin \mathcal{F}$. Da $I \setminus A \notin \mathcal{F}$ segue che $\mathcal{F} \cup \{A\}$ è una prebase, e quindi si estende a un filtro $\mathcal{F}_1$, che deve includere propriamente $\mathcal{F}$ perchè $A \notin \mathcal{F}$. Questo è assurdo perchè $\mathcal{F}$ è massimale. Viceversa se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro, allora è un filtro massimale, altrimenti si estenderebbe ad un filtro $\mathcal{F}_1$ che contiene almeno un insieme $A \notin \mathcal{F}$. Otteniamo un assurdo mostrando che nè A nè il suo complemento possono essere in $\mathcal{F}$: infatti se $I \setminus A$ è in $\mathcal{F}$, allora è anche in $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_1$ conterrebbe sia A che il suo complemento, che è una contraddizione. □

Per applicare il lemma di Zorn, abbiamo bisogno di:

46 Osservazione. Siano I, J insiemi non vuoti e sia dato, per ogni $j \in J$, un filtro $\mathcal{F}_j$ su I. Supponiamo che la famiglia di filtri $\{\mathcal{F}_j \mid j \in J\}$ sia una catena, ovvero dati due filtri della famiglia uno dei due è incluso nell'altro. Esiste un filtro $\mathcal{F}$ su I che include tutti gli $\mathcal{F}_j$. Inoltre si può prendere come $\mathcal{F}$ l'unione degli $\mathcal{F}_j$.

Proof. Sia $\mathcal{F}$ l'unione degli $\mathcal{F}_j$, cioè $X \in \mathcal{F}$ se e solo se esiste $j \in J$ con $X \in \mathcal{F}_j$. Se $X, Y \in \mathcal{F}$, allora $X \in \mathcal{F}_{j_1}$ e $Y \in \mathcal{F}_{j_2}$. Poichè gli $\mathcal{F}_j$ formano una catena, scegliendo il più grande tra $\mathcal{F}_{j_1}$ e $\mathcal{F}_{j_2}$ troviamo un $j \in J$ tale che $X, Y \in \mathcal{F}_j$ e quindi $X \cap Y \in \mathcal{F}_j \supseteq \mathcal{F}$. Ne segue che $\mathcal{F}$ è chiuso per intersezioni finite, e le altre proprietà da verificare per mostrare che $\mathcal{F}$ è un filtro sono ovvie. □

47 Lemma. *Ogni filtro $\mathcal{F}$ si estende ad un ultrafiltro.*

Proof. Applichiamo il lemma di Zorn all'insieme dei filtri propri contenenti $\mathcal{F}$ ordinati per inclusione. Le ipotesi del lemma di Zorn sono verificate per il lemma precedente. Otteniamo cosí un filtro proprio massimale contenente $\mathcal{F}$. □

Ogni prebase si estende dunque ad un ultrafiltro.

48 Definizione. (Filtro di Frechét) Sia $\mathcal{F}$ l'insieme degli $X \subseteq I$ tali che il complemento di X in I è finito. $\mathcal{F}$ è un filtro, detto *filtro di Frechét o filtro dei co-finiti.*

Un ultrafiltro su un insieme di indici infinito I è non principlale se e solo se contiene il filtro di Frechét. Visto che ogni filtro si estende ad un ultrafiltro, ne segue che su un insieme di indici infinito esiste almeno un ultrafiltro non principale. Su un insieme finito I tutti gli ultrafiltri sono principali, e tutto si banalizza.

7.3 Ultraprodotti

49 Definizione. L'ultraprodotto $\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i / U$ delle L-strutture $\mathcal{A}_i$ rispetto all'ultrafiltro U è definito come segue.

Gli elementi di $\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i / U$ sono classi di equivalenza a/U di elementi $a = \langle a(i) \mid i \in I \rangle \in \Pi_{i \in I} A_i$, dove $a/U = b/U$ se e solo se a e b coincidono su un insieme di indici in U: cioè $\{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in U$. Poichè U è chiuso per intersezioni finite e contiene I, questa è una relazione di equivalenza. Per ora abbiamo definito un insieme, non ancora una struttura. Vogliamo definire l'interpretazione dei simboli di L in modo che per ogni L-formula atomica $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ si abbia:

$$\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, c/U, \ldots)$$

se e solo se

$$\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), c(i), \ldots)\} \in U$$

Tanto per fissare le idee consideriamo il caso in cui L contenga i simboli $+, 0, <$, dove $+$ è un simbolo di funzione binaria, 0 è un simbolo di constante, e $<$ è un simbolo di relazione binaria (il nome dei simboli è irrilevante). L'ultraprodotto $\Pi_i \mathcal{A}_i/U$ è la L-struttura definita come segue:

1. $\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models a/U < b/U$ se e solo se $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models a(i) < b(i)\} \in U$. Analogamente si tratta il caso di simboli di relazione n-ari.

2. $\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models a/U + b/U = c/U$ se e solo se $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models a(i) + b(i) = c(i)\} \in U$. Analogamene per simboli di funzione n-ari.

3. $\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models 0 = c/U$ se e solo se $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models 0 = c(i)\} \in U$. Analogamente per un qualsiasi simbolo di costante.

La (3) definisce univocamente c/U come la classe di equivalenza di $c = \langle 0^{\mathcal{A}_i} \mid i \in I\rangle \in \Pi_i \mathcal{A}_i$ (c è determinato solo a meno di un insieme di indici di m_U-misura 0).

A priori la (2) definisce solo una relazione ternaria $+$ su $\Pi_i \mathcal{A}_i/U$, e non è chiaro che si tratti di una funzione, cioè che esista una e una sola classe c/U tale che $a/U + b/U = c/U$. La verifica che si tratta di una funzione è lasciata al lettore. Questo fatto segue comunque dal teorema di Los che vedremo in seguito. Possiamo infatti lavorare inizialmente con linguaggi relazionali, e poi ricondurci a questo caso speciale tramite l'osservazione che, data una relazione, il fatto che essa sia il grafico di una funzione è una proprietà esprimibile al primo ordine.

Il seguente teorema dice che l'ultraprodotto è una sorta di *media* di modelli per quanto concerne le proprietà del primo ordine: se la maggior parte dei modelli (rispetto alla misura m_U) soddisfa una certa proprietà del primo ordine, anche l'ultraprodotto soddisfa la data proprietà. Questo vale anche per proprietà che contengono parametri, e i parametri sono in effetti importanti per far funzionare la dimostrazione induttiva.

50 Teorema. *(Teorema di Los) Per ogni L-formula $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si ha*

$$\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, c/U, \ldots)$$

se e solo se

$$\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), c(i), \ldots)\} \in U$$

.

Proof. Se ϕ è atomica l'equivalenza segue facilmente dalle definizioni. Questo è del tutto ovvio nel caso di linguaggi relazionali (a cui potremmo in ogni caso ricondurci sostituendo le funzioni con i loro grafici). Lasciamo al lettore la verifica per linguaggi non relazionali: occorre porre attenzione al fatto che un formula può contenere termini in cui compaiono più simboli di funzione composti tra di loro. Ritorneremo su questo punto alla fine della dimostrazione.

Nel caso di una formula ϕ non atomica, procediamo per induzione sul numero di connettivi logici $\neg, \wedge, \vee, \exists$ presenti in ϕ (assumiamo per semplicità che $\forall x \phi$ sia definito come $\neg \exists x \neg \phi$ e quindi non ci sia bisogno di trattare questo caso). Il caso del $\wedge$ usa il fatto che U è chiuso per intersezione finita. Il caso del $\neg$ usa il fatto che U è un ultrafiltro e non semplicemente un filtro. Il caso del $\vee$ si riconduce a $\neg, \wedge$ usando le formule di De Morgan $\phi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$. Il caso del $\exists$ è leggermente più complicato perchè richiede di mostrare l'esistenza di opportune funzioni $c \in \Pi_i \mathcal{A}_i/U$.

Veniamo ai dettagli:

$\Pi_i \mathcal{A}_i \models \neg\phi(a/U, b/U, \ldots)$
$\iff$ non è vero che $\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, \ldots)$
$\iff$ (per induzione, avendo ϕ meno connettivi di $\neg\phi$) non
è vero che $\{i \mid \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$

$\iff$ (essendo U un ultrafiltro) $I \setminus \{i \mid \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$
$\iff \{i \mid \mathcal{A}_i \models \neg\phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$.

$\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models (\phi \wedge \psi)(a/U, b/U, \ldots)$
$\iff \Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, \ldots)$ e $\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \psi(a/U, b/U, \ldots)$
$\iff$ (per induzione) $X = \{i \mid \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$ e $Y = \{i \mid \mathcal{A}_i \models \psi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$
$\iff X \cap Y \in U$
$\iff \{i \mid \mathcal{A}_i \models (\phi \wedge \psi)(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$

Consideriamo ora il caso del $\exists$ e trattiamo le due implicazioni da dimostrare separatamente. Supponiamo:
$X = \{i \mid \mathcal{A}_i \models \exists x \phi(x, a(i), \ldots)\} \in U$.

Sia $c \in \Pi_i \mathcal{A}_i$ tale che, per $i \in X$, $c(i)$ soddisfa $\mathcal{A}_i \models \phi(c(i), a(i), \ldots)$ (in generale l'esistenza di c richiede l'assioma della scelta per selezionare $c(i)$ tra i vari possibili candidati), e per $i \notin X$, $c(i)$ è arbitrario. Poichè $X \in U$, c/U non dipende da come è stato definito $c(i)$ per $i \notin X$. Poichè ϕ ha un connettivo in meno di $\exists x \phi$, per ipotesi induttiva
$\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(c/U, a/U, \ldots)$, e quindi
$\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \exists x \phi(x, , a/U, \ldots)$

Viceversa sapendo che $\exists x \phi(x, a/U, \ldots)$ vale in $\Pi_i \mathcal{A}_i/U$, troviamo c/U, poi applichiamo l'ipotesi induttiva, e otteniamo che $\mathcal{A}_i \models \phi(c(i), a(i), \ldots)$ vale per un insieme di indici A in U. Ne segue che $\mathcal{A}_i \models \exists x \phi(x, a(i), \ldots)$ vale per un insieme di indici che include A e quindi appartiene anch'esso ad U.

Questo completa la dimostrazione, salvo risolvere il problema delle funzioni composte menzionato all'inizio. Consideriamo ad esempio una formula atomica come $f(g(x)) = y$, dove f, g sono simboli di funzione. Non è difficile trattare questo caso direttamente, ma si può in ogni caso aggirare il problema eliminando le composizioni al costo di quantificatori esistenziali: $f(g(x)) = y \leftrightarrow \exists z (z = g(x) \wedge f(z) = y)$, riconducendosi cosí a casi già trattati.

□

7.4 Teorema di compattezza

Diamo ora per mezzo degli ultraprodotti, una dimostrazione puramente algebrica del teorema di compattezza per la logica del primo ordine.

51 Teorema. *(Teorema di compattezza) Sia T una L-teoria. Supponiamo che per ogni sottoteoria finita T' di T esista un modello $M_{T'}$ di T'. Allora T ha un modello M.*

Proof. L'idea è di definire $M = \Pi_{T'} M_{T'}/U$ per un opportuno ultrafiltro U. L'insieme degli indici è dunque costituito da $I = \{T' \mid T'$ è una sottoteoria finita di $T\}$. Affinchè M sia modello di T occorre che per ogni assioma $\phi \in T$ si abbia $M \models \phi$ (possiamo assumere che gli assiomi siano formule chiuse). Per il teorema di Los questo accade se l'insieme X_ϕ degli indici $T' \in I$ tali che $M_{T'} \models \phi$ appartiene all'ultrafiltro U. Basta quindi scegliere U in modo che per ogni $\phi \in T$, $X_\phi = \{T' \in I \mid \phi \in T'\} \in U$. Gli insiemi X_ϕ, al variare di ϕ tra gli assiomi di T, costituiscono una prebase, ovvero l'intersezione di un numero finito di essi è non vuota. Per verificarlo osserviamo che $X_{\phi_1} \cap \ldots \cap X_{\phi_n} = \{T' \in I \mid \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq T'\}$ è non vuoto, perchè contiene almeno $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. Basta ora scegliere un ultrafiltro U che estende questa prebase. □

Un ultraprodotto $\Pi_{i \in I} M_i/U$ con tutti i fattori uguali $M_i = M$ viene detto *ultrapotenza*, e indicato con $\Pi_{i \in I} M/U$.

Se ϕ è un L-enunciato senza parametri, per il teorema di Los $\Pi_i M/U \models \phi$ se e solo se $M \models \phi$. Quindi l'ultrapotenza è elementarmente equivalente al modello: $\Pi_i M/U \equiv M$.

In generale l'ultrapotenza $\Pi_i M/U$ non è isomorfa ad M (però lo è se U è principale). Questo non contraddice il teorema di Los in quanto, se M è infinito, "essere isomorfo ad M" non è una proprietà del primo ordine, e non c'è quindi motivo, a priori, che si conservi nell'ultraprodotto.

Se invece M è finito, la proprietà "essere isomorfo ad M" è esprimibile al primo ordine (esercizio) e quindi l'ultrapotenza $\Pi_i M/U$ è sempre isomorfa ad M per il teorema di Los.

Tra M e una sua ultrapotenza $\Pi_i M_i/U$ c'è una relazione più forte che l'essere elementarmente equivalenti. Vale cioè la seguente:

52 Proposizione. *Sia* $\delta\colon M \to \Pi_i M/U$ *la mappa diagonale che manda* $a \in M$ *nella classe di equivalenza della funzione costante* a*, cioè* $\delta(a) = \langle a \mid i \in I\rangle/U$*. Allora* δ *immerge elementarmente* M *in* $\Pi_i M/U$*.*

Proof. Essendo tutti gli M_i uguali ad M, dal teorema di Los segue che $\Pi_i M/U \models \phi(\delta(a), \delta(b), \ldots)$ se e solo se $M \models \phi(a, b, \ldots)$. □

L'isomorfismo δ è detto *isomorfismo diagonale*. Se identifichiamo $\delta(a)$ con a un ultraprodotto è una estensione elementare del modello.

53 Esercizio. Un ultraprodotto di modelli finiti non è necessariamente finito ("finito" non è una proprietà del primo ordine). Ad esempio se U è un ultrafiltro non banale su $\mathbb{N}$, $\Pi_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/U$ è un anello infinito (dato $k \in \mathbb{N}$, si applichi il teorema di Los alla proprietà del primo ordine "avere più di k elementi"). Si può verificare che $\Pi_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/U$ non è mai isomorfo ad $\mathbb{R}$, e neppure elementarmente equivalente ad $\mathbb{R}$ (si trovi una proprietà del primo ordine che li distingue usando il teorema di Los).

7.5 Numeri reali non-standard

Consideriamo una ultrapotenza non principale del campo dei numeri reali $\mathbb{R}^* = \Pi_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}/U$, dove abbiamo preso per semplicità $\mathbb{N}$ come insieme degli indici. $\mathbb{R}^*$ è un campo ordinato come $\mathbb{R}$ perchè la proprietà di essere un campo ordinato è del primo ordine e quindi si conserva. Non è in generale completo, cioè un suo sottoinsieme limitato superiormente non ha necessariamente un sup (però è facile verificare, usando il teorema di Los, che ogni sottoinsieme definibile e limitato superiormente ha un sup). $\mathbb{R}^*$ contiene un sottocampo isomorfo ad $\mathbb{R}$, costituito dagli elementi della forma $\delta(a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^*$ non è *archimedeo*, ovvero contiene degli elementi α tali che per ogni intero positivo n, $0 < \alpha < \frac{1}{n}$, dove abbiamo scritto per semplicità $\frac{1}{n}$ anzichè $\delta(\frac{1}{n})$. Tali elementi vengono detti *infinitesimi* e non possono ovviamente essere nella immagine di δ. Un tipico elemento infinitesimo è $\alpha = \langle \frac{1}{i} \mid i \in \mathbb{N}\rangle/U$. Per ogni fissato n, l'insieme degli indici $i \in \mathbb{N}$ tali che $\frac{1}{i} < \frac{1}{n}$ è co-finito (contiene tutti gli i tranne un numero finito), e quindi appartiene all'ultrafiltro U (se U non è principale). Segue dal teorema di Los che $\alpha < \frac{1}{n}$ e poiché n è arbitrario abbiamo che α è infinitesimo (è maggiore di zero perché lo è su tutti gli indici).

La costruzione di $\mathbb{R}^*$ è la base della analisi non-standard di Abraham Robinson. Lavorando in $\mathbb{R}^*$, $\frac{dy}{dx}$ puó essere interpretato come rapporto di due infinitesimi - come lo pensavano Leibniz e Newton - senza per questo perdere di rigore. Questo uso rigoroso degli infinitesimi può essere poi usato per dimostrare risultati su $\mathbb{R}$ via il teorema di Los che ci permette di trasferire risultati da $\mathbb{R}^*$ ad $\mathbb{R}$. Per arricchire la classe di proprietà a cui poter applicare il *transfer* (trasferimento da $\mathbb{R}^*$ a $\mathbb{R}$) è conveniente fare un ultraprodotto non solo di $\mathbb{R}$ con la sua struttura di campo, ma di una intera *soprastruttura* che comprende sia $\mathbb{R}$, l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$, l'insieme delle parti dell'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ ecc. (si veda ad esempio l'Handbook of mathematical logic, o la monografia di A.Robinson edita da Boringhieri).

La possibilità di impiego della analisi non standard sta non tanto nel fatto di aver costruito un campo reale non archimedeo che estende $\mathbb{R}$ (tali campi si possono costruire facilmente senza ricorrere agli ultraprodotti, basta ad esempio ordinare il campo delle frazioni $\mathbb{R}(x)$ in modo che la x risulti infinitesima), quanto nella possibilità di applicare il principio del transfer, che è garantito dal teorema di Los.

54 Esercizio. L'insieme degli infinitesimi è limitato superiormente e non ha un sup. Gli infinitesimi costituiscono quindi un sottoinsieme non definibile di $\mathbb{R}^*$.

8 Tipi

8.1 Tipi di elementi in una struttura

Sia $\mathcal{A}$ una L-struttura con dominio A e sia $a \in A$. Il *tipo di* a *in* $\mathcal{A}$ è definito come l'insieme di tutte le proprietà del primo ordine di a, cioè come l'insieme $p_a^{\mathcal{A}}(x)$ di tutte le formule $\phi(x)$ tali che $\mathcal{A} \models \phi(a)$. Risulta conveniente pensare ad x come ad un nuovo simbolo di costante anzichè di variabile. Quindi $\phi(x)$ è un $L \cup \{x\}$ enunciato e $p_a^{\mathcal{A}}(x)$ è una $L \cup \{x\}$-teoria. La notazione $\phi(x)$ indica solo che x potrebbe comparire nella formula, ma non che effettivamente compaia. Quindi gli $L \cup \{x\}$-enunciati includono gli L-enunciati e $p_a^{\mathcal{A}}(x)$ contiene l'insieme $Th(\mathcal{A})$ di tutti gli L-enunciati veri in $\mathcal{A}$. Ne segue che $p_a^{\mathcal{A}}(x)$ è dunque una $L \cup \{x\}$ teoria completa contenente la L-teoria completa $Th(\mathcal{A})$ (la completezza di $p_a^{\mathcal{A}}(x)$ segue dal fatto che per ogni $\phi(x)$, o $\mathcal{A} \models \phi(a)$ oppure $\mathcal{A} \models \neg\phi(a)$).

Ogni $L \cup \{x\}$ struttura può essere pensata come una coppia $(\mathcal{B}, b)$ data da una L-struttura $\mathcal{B}$ ed un elemento $b \in B$ che interpreta x. In particolare $(\mathcal{A}, a)$ è una $L \cup \{x\}$-struttura, e poichè a soddisfa tutte le formule di $p_a^{\mathcal{A}}(x)$ ne segue che $(\mathcal{A}, a)$ è un modello della $L \cup \{x\}$-teoria completa $p_a^{\mathcal{A}}(x)$.

Naturalmente questa teoria potrebbe avere altri modelli $(\mathcal{B}, b)$, in qual caso l'insieme $p(x) = p_a^{\mathcal{A}}(x)$ sarebbe al tempo tesso il tipo di a in $\mathcal{A}$ e il tipo di b in $\mathcal{B}$ (usando il fatto che due teorie complete una inclusa nell'altra sono uguali). Dato un modello $(\mathcal{B}, b)$ di $p(x)$ diremo che b *realizza* il tipo $p(x)$ in $\mathcal{B}$. Dire che due L-strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ possiedono due elementi $a \in A$ e $b \in B$ con lo stesso tipo significa che $\mathcal{A} \models \phi(a)$ se e solo se $\mathcal{B} \models \phi(b)$ per ogni $L \cup \{x\}$-formula $\phi(x)$. In tal caso abbiamo la equivalenza elementare $\mathcal{A}, a \equiv \mathcal{B}, b$ delle due $L \cup \{x\}$-strutture $(\mathcal{A}, a)$ e $(\mathcal{B}, b)$. Per il teorema di Fraï questo si verifica se e solo se $\mathcal{A}, a \sim_\omega \mathcal{B}, b$. Un caso interessante si verifica quando $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, ovvero a, b sono elementi della stessa struttura $\mathcal{A}$. In tal caso risulta utile il seguente:

55 Teorema. *Siano a, b due elementi di una L-struttura $\mathcal{A}$. Una condizione sufficiente affinché a e b abbiano lo stesso tipo, è che esista un automorfismo di $\mathcal{A}$ che manda a in b.*

Proof. Un isomorfismo preserva tutte le proprietà esprimibili con formule del linguaggio. □

Facciamo alcuni esempi.

56 Esempio.
1. Nella struttura $(\mathbb{Q}, <)$ tutti gli elementi hanno lo stesso tipo, non c'è modo di differenziare un numero razionale da un altro usando solo formule del primo ordine nella segnatura $<$, in quanto dati due razionali esiste un automorfismo d'ordine di $\mathbb{Q}$ che porta l'uno nell'altro.

2. Nella struttura $(\mathbb{Q}, <, +, \cdot)$ tutti gli elementi hanno tipo diverso. Infatti usando $+$ e $\cdot$ si riesce a definire al primo ordine sia $0, 1$ che l'operazione di divisione, e quindi si riescono a definire tutti i razionali. Ad esempio il tipo $p_0(x)$ di 0 e il tipo $p_1(x)$ di 1 sono differenziati dal fatto che solamente il primo contiene la formula $\forall y(x + y = y)$ e solamente il secondo contiene la formula $\forall y(x \cdot y = y)$.

3. Nella struttura $(\mathbb{Q}, <, +)$ tutti gli elementi strettamente positivi hanno lo stesso tipo, e tutti gli elementi strettamente negativi hanno lo stesso tipo. Ci sono quindi in tutto tre tipi realizzati in $(\mathbb{Q}, <)$. Ad esempio per verificare che due elementi positivi a ed b hanno lo stesso tipo basta osservare che la moltiplicazione per b/a è un automorfismo (è biunivoca e preserva l'ordine e l'addizione) che porta a in b.

Più in generale possiamo considerare il tipo di una n-upla di elementi $(a_1, \ldots, a_n)$ di $\mathcal{A}$. Esso è definito come l'insieme $p(x_1, \ldots, x_n)$ di tutti gli $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$-enunciati $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ tali che $\mathcal{A} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$ (dove $x_1, \ldots, x_n$ sono nuove costanti). Diciamo allora che $(a_1, \ldots, a_n)$ *realizza* il tipo $p(x_1, \ldots, x_n)$ (in $\mathcal{A}$) e che $p(x_1, \ldots, x_n)$ è realizzato da $(a_1, \ldots, a_n)$. Se un tipo non viene realizzato da nessuna n-upla di elementi di $\mathcal{A}$, diciamo che è *omesso* da $\mathcal{A}$.

I tipi di n-uple vengono chiamati n-tipi, quelli di singoli elementi 1-tipi.

8.2 Tipi di una teoria

I *tipi di una teoria T* sono per definizione i tipi di elementi di modelli di T. Più precisamente un inseme di $L(x_1, \ldots, x_n)$-formule $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ è un n-tipo di una L-teoria T se e solo se esiste un modello $\mathcal{A}$ di T e una n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ in A tale che p è il tipo di $(a_1, \ldots, a_n)$ in $\mathcal{A}$. Poichè ogni teoria non contraddittoria ha un modello è facile verificare che:

57 Lemma. *Sono equivalenti:*

1. *$p(x_1, \ldots, x_n)$ è un n-tipo di T.*

2. *$p(x_1, \ldots, x_n)$ è una $L(x_1, \ldots, x_n)$-teoria completa contente T.*

I tipi di cui abbiamo fino ad ora parlato sono *tipi completi*, cioè teorie complete. Un *tipo non necessariamente completo di T* è un sottoinsieme di un tipo completo di T, ovvero un insieme $p(x_1, \ldots, x_n)$ di $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$-formule tale che l'unione $p(x_1, \ldots, x_n) \cup T$ è coerente. Ogni tipo di T (completo o incompleto) è realizzato in qualche modello di T. Non è detto però che tutti i tipi di T siano realizzati in uno stesso modello $\mathcal{A}$. Consideriamo ora la teoria completa $T = Th(\mathcal{A})$ e chiediamoci che relazione c'è tra i tipi di $Th(\mathcal{A})$ e i tipi realizzati in $\mathcal{A}$. Per semplicità consideriamo gli 1-tipi, il caso degli n-tipi è analogo. Sia $p(x)$ un tipo di $T = Th(\mathcal{A})$ (completo o incompleto). Questo vuol dire che $p(x)$ è realizzato in qualche modello $\mathcal{B}$ di T (cioè in qualche struttura elementarmente equivalente ad $\mathcal{A}$), ma non è detto che sia realizzato proprio in $\mathcal{A}$.

58 Lemma. *Sono equivalenti:*

1. *$p(x)$ è un tipo (completo o no) di $Th(\mathcal{A})$.*
2. *$p(x)$ è una $L \cup \{x\}$-teoria* finitamente realizzata *in $\mathcal{A}$, nel senso che per ogni sottoinsieme finito $\phi(x)$ di $p(x)$ esiste $a \in A$ con $\mathcal{A} \models \phi(a)$ (prendendo congiunzioni finite posso pensare a $\phi(x)$ come ad una singola formula).*

Proof. Se $p(x)$ è finitamente realizzato in $\mathcal{A}$, per compattezza $p(x) \cup Th(\mathcal{A})$ ha un modello, e quindi $p(x)$ è un tipo di $Th(\mathcal{A})$.

Viceversa se $p(x)$ non è finitamente realizzato in $\mathcal{A}$, esiste una parte finita $\phi(x)$ di $p(x)$ tale che $\mathcal{A} \models \neg\exists y \phi(y)$, il che implica che $Th(\mathcal{A}) \models \neg\exists y \phi(y)$ e quindi $Th(\mathcal{A}) \cup \phi(x)$ è incoerente. A maggior ragione $Th(\mathcal{A}) \cup p(x)$ è incoerente e $p(x)$ non è quindi un tipo di $Th(\mathcal{A})$. □

Osserviamo che ogni teoria completa T è della forma $T = Th(\mathcal{A})$ per qualche $\mathcal{A}$ (basta prendere un qualsiasi modello $\mathcal{A}$ di T). Quindi il lemma precedente si applica a tutte le teorie complete e mostra che $p(x)$ è un tipo della teoria completa T se e solo se per ogni parte finita $\phi(x)$ di $p(x)$, $T \models \exists y \phi(y)$. Per questa caratterizzazione è necessaria l'ipotesi che T sia completa.

Per definizione un tipo $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ di $Th(\mathcal{A})$ è realizzato in qualche modello $\mathcal{B}$ di $Th(\mathcal{A})$, cioè in qualche $\mathcal{B}$ elementarmente equivalente ad $\mathcal{A}$. Rafforziamo questa osservazione nel modo seguente:

59 Teorema. *Ogni n-tipo $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ di $Th(\mathcal{A})$ è realizzato in una estensione elementare di $\mathcal{A}$.*

Proof. Basta mostrare che $ED(\mathcal{A}) \cup p(x_1, \ldots, x_n)$ è una teoria coerente. Se non lo fosse, per compattezza troveremmo una parte finita $\theta(\vec{x})$ di p (che possiamo pensare come ad una singola formula) tale che $ED(\mathcal{A}) \cup \{\theta(\vec{x})\}$ è incoerente, da cui $\mathcal{A} \models \forall \vec{y} \neg\theta(\vec{y})$. Questo è assurdo perchè p essendo un tipo è finitamente soddisfacibile in $\mathcal{A}$. □

60 Esempio. Sia $T = Th(\mathbb{R})$ la teoria completa della struttura $\mathbb{R} = (\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <)$. Sia $p(x)$ l'insieme delle L-formule $0 < x, x < 1, x + x < 1, x + x + x < 1, x + x + x + x < 1, \ldots$ (cioè $0 < x < 1/n$ per ogni intero n). Chiaramente $p(x)$ non è realizzato in $\mathbb{R}$ perchè in $\mathbb{R}$ non ci sono elementi maggiori di zero e minori di $1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Però ogni parte finita di $p(x)$ è realizzata in $\mathbb{R}$, e quindi $p(x) \cup Th(\mathbb{R})$ è coerente per compattezza, ed è quindi un tipo di $Th(\mathbb{R})$ (che sarà realizzato in qualche modello elementarmente equivalente ad $\mathbb{R}$). Chiamiamo $p(x)$ il *tipo di un elemento infinitesimo.* Il risultato precedente garantisce l'esistenza di estensioni elementari di $\mathbb{R}$ con elementi infinitesimi.

61 Esercizio.

1. Si mostri che qualsiasi tipo $p(x)$ di $T = Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ che contenga almeno le due formule $x^2 = 1 + 1$ e $x > 0$ è realizzato in $\mathbb{R}$. Suggerimento: c'è un solo elemento di $\mathbb{R}$ che verifica queste due formule: $\sqrt{2}$. Bisogna mostrare che esso verifica anche le altre formule di $p(x)$. A tal fine si mostri che la congiunzione delle due date formule implica, in T, tutte le altre formule di $p(x)$.
2. Si rafforzi l'esercizio precedente mostrando che se un tipo $p(x)$ di $Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ contiene $x^2 = 1 + 1$, allora esso è realizzato in $\mathbb{R}$.

Il precedente esercizio fa venire in mente due definizioni:

62 Definizione. Un tipo *principale* di una teoria completa T è un tipo in cui una formula implica tutte le altre (in T). Un tipo *algebrico* è un tipo contenente una formula la quale, in un modello di T, è realizzata solo da un numero finito di elementi (visto che T è completa ciò si verificherà allora in tutti i modelli).

Alla luce di queste definizioni l'esercizio precedente si generalizza:

63 Teorema. *Un tipo principale di una teoria T é realizzato in tutti i modelli di T. Un tipo algebrico di una teoria completa T è principale.*

8.3 Tipi con parametri

Sia $\mathcal{M}$ una L-struttura con dominio M che supponiamo fissata nel resto di questa sezione e sia A un sottoinsieme di M.

Consideriamo il linguaggio $L(A)$ ottenuto aggiungendo un nuovo simbolo di costante $\underline{a}$ per ogni $a \in A$. Talvolta indicheremo con a sia l'elemento $a \in A$ che la costante a lui associata a meno che non ci sia rischio di ambiguità.

Sia $(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ la $L(A)$-struttura ottenuta espandendo la L-struttura $\mathcal{M}$ in modo da interpretare la costante associata al simbolo a con il corrispondente elemento a. Chiamiamo questi nuovi simboli di costante, ed anche la loro interpretazione, *parametri*.

La $L(A)$-teoria completa $Th(\mathcal{M}, a)_{a \in A})$ viene detta *teoria di $\mathcal{M}$ con parametri da A*. Se A è vuoto essa coincide con la L-teoria completa $Th(\mathcal{M})$. Se invece A coincide con il dominio M di $\mathcal{M}$ otteniamo il diagramma elementare $ED(\mathcal{M})$ di $\mathcal{M}$.

Un *n-tipo di $\mathcal{M}$ con parametri da A* è definito come un tipo $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ della $L(A)$-teoria completa $Th((\mathcal{M}, a)_{a \in A})$. Equivalentemente un n-tipo $p(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathcal{M}$ con parametri da A è un insieme di $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ formule con parametri da A finitamente realizzato in $\mathcal{M}$ (interpretando $\underline{a}$ con a).

Per i risultati precedenti $p(x_1, \ldots, x_n)$ sarà realizzato in una estensione elementare $\mathcal{N}$ di $\mathcal{M}$. Per essere più precisi p sarà realizzato in una estensione elementare della $L \cup A$-struttura $(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$. Ogni tale estensione elementare è della forma $(\mathcal{N}, a)_{a \in A}$ dove $\mathcal{N}$ è una estensione elementare di $\mathcal{M}$ e a è l'interpretazione di $\underline{a}$ (trattandosi di una estensione le costanti $\underline{a}$ devono essere interpretate nello stesso modo nelle due strutture, e cioè $\underline{a}$ deve in ogni caso essere interpretata con a.)

Dato un elemento $b \in \mathcal{N}$ il tipo di b in $\mathcal{N}$ con parametri da A è la $L(A) \cup \{x\}$ teoria completa consistente di tutte le formule $\phi(x)$ con parametri da A tali che $(\mathcal{N}, a)_{a \in A} \models \phi(b)$, che scriveremo anche più semplicemente $\mathcal{N} \models \phi(b)$ assumendo implicitamente che le costanti $\underline{a}$ presenti in ϕ sono interpretate con i corrispondenti elementi a (e quindi identificando $\mathcal{N}$ con la $L(A)$-struttura $(\mathcal{N}, a)_{a \in A})$. Similmente per tipi di n-uple.

64 Osservazione. Se $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ tipi $p(x)$ di $\mathcal{A}$ con parametri (cioè gli insiemi di formule con parametri finitamente realizzati in $\mathcal{A}$) coincidono con i tipi di $\mathcal{B}$ con parametri da A. Inoltre se $p(x)$ è realizzato in $\mathcal{A}$ continuerà a essere realizzato in $\mathcal{B}$ dallo stesso elemento. Può però succedere che un tipo di $\mathcal{A}$ sia realizzato in $\mathcal{B}$ ma non in $\mathcal{A}$.

9 Modelli ω-saturi

Un modello $\mathcal{M}$ di una teoria completa T si dice ω-saturo se $\mathcal{M}$ realizza tutti gli 1-tipi di $\mathcal{M}$ con un numero finito di parametri $A \subset M$ (cioè i tipi $p(x)$ della teoria $Th((\mathcal{M}, a)_{a \in A})$).

65 Esempio.

1. $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ non è ω-saturo in quanto non realizza il tipo di un elemento infinitesimo (che non ha parametri del tutto).
2. $(\mathbb{R}, <)$ è ω-saturo. In questo caso non riusciamo a esprimere il tipo di un elemento infinitesimo. Possiamo scrivere $0 < x, x < 1/2, x < 1/3, x < 1/4, x < 1/5, \ldots$ ma potendo usare solo un numero finito di parametri non possiamo continuare all'infinito. (Ovviamente questo ancora non dimostra che $(\mathbb{R}, <)$ è ω-saturo.)

Più in generale possiamo definire, dato un cardinale κ, il concetto di modello κ-saturo. L'unica differenza è che possiamo usare un insieme di parametri di cardinalità $< \kappa$ anzichè $< \omega$. Ad esempio $(\mathbb{R}, <)$ non è $\aleph_1$-saturo in quanto potendo usare una quantita numerabile di parametri possiamo esprimere il tipo di un elemento infinitesimo. C'è un limite alla possibile saturazione di una struttura. Nessuna struttura infinita $\mathcal{A}$ può essere κ-satura dove κ è maggiore della cardinalità di $\mathcal{A}$. Infatti potendo usare tanti parametri quanti la cardinalità di $\mathcal{A}$, possiamo considerare il tipo $p(x)$ contenente tutte le formule della forma $x \neq a$ al variare di a in A. Essendo $\mathcal{A}$ infinita questo tipo è finitamente realizzabile in $\mathcal{A}$ (e quindi è un tipo di $\mathcal{A}$) ma ovviamente non è realizzato in $\mathcal{A}$. Nel seguito ci concentreremo solo sulla ω-saturazione.

66 Teorema. *Ogni L-struttura ha una estensione elementare ω-satura.*

Proof. Sia $\{p_i(x_i) \mid i \in I\}$ l'insieme di tutti gli 1-tipi di $\mathcal{M}$ con un numero finito di parametri, dove abbiamo scelto una variabile diversa x_i per ogni tipo (in quanto ovviamente non richiediamo che tutti i tipi siano realizzati dallo stesso elemento). La teoria $ED(\mathcal{M}) \cup \{p_i(x_i) \mid i \in I\}$ è coerente per compattezza, in quanto i vari p_i

essendo tipi sono finitamente soddisfacibili in $\mathcal{M}$. Quindi esiste un modello $\mathcal{M}_1$ di questa teoria che estende elementarmente $\mathcal{M}$ (in quando ogni modello di $ED(\mathcal{M})$ è identificabile con una estensione elementare di $\mathcal{M}$). Tale modello $\mathcal{M}_1$ realizza tutti i tipi $p_i(x)$, ma non è detto che sia ω-saturo perchè ora dobbiamo considerare anche i tipi con un numero finito di parametri da $\mathcal{M}_1$. Iteriamo perciò il procedimento ottenendo una catena elementare $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2 \prec \dots$ dove ogni $\mathcal{M}_{n+1}$ realizza tutti i tipi di $\mathcal{M}_n$ con un numero finito di parametri. Il limite $\mathcal{M}_\omega$ di questa catena è una estensione elementare di tutti gli $\mathcal{M}_i$ e realizza tutti i tipi di $\mathcal{M}_\omega$ con un numero finito di parametri. Per verificare ciò basta osservare che, dato un tale tipo $p(x)$, i suoi parametri saranno contenuti in $\mathcal{M}_n$ e $p(x)$ sarà realizzato in $\mathcal{M}_{n+1}$, e quindi in $\mathcal{M}_\omega$ (essendo $\mathcal{M}_\omega$ una estensione elementare di $\mathcal{M}_n$ e di $\mathcal{M}_{n+1}$). □

67 Lemma. *Se $\mathcal{A}$ è ω-saturo e $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, allora per ogni sequenza finita $b_1, \dots, b_n$ in B, esistono $a_1, \dots, a_n$ in A tali che $\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n \equiv \mathcal{A}, a_1, \dots, a_n$.*

Proof. Nel passare da n ad $n+1$ supponiamo di avere già $\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n \equiv \mathcal{A}, a_1, \dots, a_n$ e consideriamo un nuovo elemento $b_{n+1} \in B$. Sia x un nuovo simbolo di costante e consideriamo l'insieme $p(x)$ di tutti gli $L \cup \{x\}$-enunciati $\phi(a_1, \dots, a_n, x)$ con parametri $a_1, \dots, a_n$, tali che $\mathcal{B} \models \phi(b_1, \dots, b_n, b_{n+1})$. Tale insieme $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in $\mathcal{A}$ altrimenti esisterebbe una sua parte finita $\phi(a_1, \dots, a_n, x)$ (che possiamo pensare come ad una singola formula prendendo la congiunzione) tale che $\mathcal{A} \models \neg\exists y \phi(a_1, \dots, a_n, y)$, da cui otterremmo la contraddizione $\mathcal{B} \models \neg\exists y \phi(b_1, \dots, b_n, y)$. Abbiamo quindi dimostrato che $p(x)$ è un tipo di $\mathcal{A}$ (con un numero finito di parametri). Per la ω-saturazione $p(x)$ è realizzato da qualche $a_{n+1} \in A$. Ne segue che $\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n, b_{n+1} \equiv \mathcal{A}, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$. □

68 Teorema. *Se $\mathcal{A}$ è ω-saturo allora ogni struttura numerabile $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ è immergibile elementarmente in $\mathcal{A}$ (diciamo che $\mathcal{A}$ è ω-*universale*).*

Proof. Diamo una enumerazione $b_1, b_2, b_3, \dots$ di $\mathcal{B}$ e ragioniamo come nel risultato precedente per trovare induttivamente $a_1, a_2, a_3, \dots$ in $\mathcal{A}$ tali che per ogni n, $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \equiv \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$. La funzione $b_n \mapsto a_n$ è l'immersione desiderata. □

69 Lemma. *Se $\mathcal{A}$ è ω-saturo e $n \in \omega$, allora tutti gli n-tipi di $\mathcal{A}$ con un numero finito di parametri sono realizzati in $\mathcal{A}$ (per definizione di ω-saturo questo è vero per gli 1-tipi).*

Proof. Dato un n-tipo $p(x_1, \dots, x_n)$ di $\mathcal{A}$ con un insieme finito di parametri $X \subseteq A$ esso sarà realizzato in una estensione elementare $\mathcal{B}$ di $\mathcal{A}$ da una n-upla di elementi $(b_1, \dots, b_n)$. Per i risultati precedenti esistono $a_1, \dots, a_n$ in A tali che $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \equiv \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$. Ne segue che $(a_1, \dots, a_n)$ realizza p. □

70 Teorema. *Se due strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono elementarmente equivalenti ed ω-sature, allora esse sono ∞-equivalenti (nel senso dei giochi di Ehrenfeucht-Fraisse). In particolare se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono numerabili allora sono isomorfe.*

Proof. Basta mostrare che se $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ sono n-uple di elementi da A e B rispettivamente tali che $\mathcal{A}, \vec{a} \equiv \mathcal{B}, \vec{b}$ (includiamo il caso $n = 0$), allora per ogni $a \in A$ esiste $b \in B$ con $\mathcal{A}, \vec{a}, a \equiv \mathcal{B}, \vec{b}, b$, e viceversa per ogni b esiste un corrispondente a. Per la direzione da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{A}$ usiamo la ω-saturazione di $\mathcal{A}$, per quella da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ quella di $\mathcal{B}$. □

10 Teorema di separazione ed eliminazione dei quantificatori

71 Lemma. *Sia Γ un insieme infinito di L-enunciati e sia T una L-teoria. Se $Mod(T) \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Mod(\gamma)$, allora esiste un sottoinsieme finito $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ di Γ tale che $Mod(T) \subseteq Mod(\gamma_1) \cup \dots \cup Mod(\gamma_n)$ (cioè $T \models \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_n$).*

Proof. Supponiamo per assurdo che per ogni sottoinsieme finito $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ di Γ esista un modello $\mathcal{A} \models T$, $\mathcal{A} \models \neg\gamma_1 \wedge \dots \neg\gamma_n$. Allora per compattezza la teoria $T \cup \{\neg\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ ha un modello $\mathcal{B}$. Ma allora $\mathcal{B} \in Mod(T)$ e $\mathcal{B} \notin \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Mod(\gamma)$, contraddicendo le ipotesi. □

Il lemma dice che $Mod(T)$ è uno spazio topologico compatto se si prendono come aperti basici i sottoinsiemi della forma $Mod(T, \phi)$ (cioè $Mod(T) \cap Mod(\phi)$). Tali insiemi sono anche chiusi perchè il complemento è $Mod(T, \neg\phi)$. Lo spazio non è di Hausdorff perchè non separa i modelli elementarmente equivalenti. Si può rendere di Hausdorff identificando i modelli elementarmente equivalenti, il che equivale a lavorare nello spazio delle teorie complete anzichè nello spazio dei modelli. In sarebbe meglio lavorare nello spazio delle teorie anche perchè lo spazio dei modelli.

72 Teorema. *(Teorema di separazione) Sia Γ un insieme di L-enunciati chiuso per connettivi booleani. Supponiamo che T_1 e T_2 siano due L-teorie tali che per ogni $\mathcal{A} \in Mod(T_1), \mathcal{B} \in Mod(T_2)$ esista $\gamma \in \Gamma$ con $A \in Mod(\gamma)$ e $\mathcal{B} \in Mod(\neg\gamma)$. Allora esiste $\gamma^* \in \Gamma$ tale che $Mod(T_1) \subseteq Mod(\gamma^*)$ e $Mod(T_2) \subseteq Mod(\neg\gamma^*)$.*

Proof. Fissiamo $\mathcal{A} \models T_1$ e per ogni $\mathcal{B} \models T_2$ scegliamo $\gamma_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \in \Gamma$ con $\mathcal{A} \models \gamma_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ e $\mathcal{B} \models \neg\gamma_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. Facendo variare $\mathcal{B}$ in $Mod(T_2)$ otteniamo $Mod(T_2) \subseteq \bigcup_{\mathcal{B}} Mod(\neg\gamma_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$. Quindi per compattezza esiste un sottoricoprimento finito $Mod(T_2) \subseteq Mod(\neg\gamma_{A,B_1}) \cup \ldots \cup Mod(\neg\gamma_{A,B_n})$. Sia $\gamma_A = \gamma_{A,B_1} \wedge \ldots \wedge \gamma_{A,B_n}$. Si ha $\mathcal{A} \in Mod(\gamma_A)$ e $Mod(T_2) \subseteq Mod(\neg\gamma_A)$. Ora facendo variare $\mathcal{A}$ in $Mod(T_1)$ otteniamo $Mod(T_1) \subseteq \bigcup_{\mathcal{A}} Mod(\gamma_{\mathcal{A}})$. Di nuovo per compattezza possiamo estrarre un sottoricoprimento finito, e possiamo prendere come γ^* la disgiunzione delle corrispondenti formule. □

Il risultato appena dimostrato ha una versione topologica: in uno spazio compatto due chiusi disgiunti sono separati da due aperti disgiunti. Lo abbiamo dimostrato per lo spazio compatto di tutti gli L-modelli e per i due sottoinsiemi chiusi $Mod(T_1)$ e $Mod(T_2)$, ottenendo anche informazioni ulteriori su come sono fatti gli aperti che separano.

73 Definizione. Scriviamo $\mathcal{A} \equiv_\Gamma \mathcal{B}$ se per ogni enunciato $\gamma \in \Gamma$ abbiamo $\mathcal{A} \models \gamma$ se e solo se $\mathcal{B} \models \gamma$. Se Γ consiste di un singolo enunciato γ scriviamo $\equiv_\gamma$. Se Γ è l'insieme di tutti gli L-enunciati otteniamo la nozione di equivalenza elementare $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

74 Teorema. *Sia Γ un insieme di L-enunciati chiusi per connettivi booleani e sia ϕ un L-enunciato. Supponiamo che tra i modelli della una L-teoria T la relazione $\equiv_\Gamma$ implichi $\equiv_\phi$. Allora ϕ è dimostrabilmente equivalente in T ad un enunciato di Γ.*

Proof. Consideriamo le due L-teorie T, ϕ e $T, \neg\phi$. Se $\mathcal{A} \models T \cup \{\phi\}$ e $\mathcal{B} \models T \cup \{\neg\phi\}$ allora per le ipotesi del teorema $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono separati da una formula di Γ. Per il teorema di separazione otteniamo $\gamma^* \in \Gamma$ con $Mod(T,\phi) \subseteq Mod(\gamma^*)$ e $Mod(T,\neg\phi) \subseteq Mod(\neg\gamma^*)$. Ne segue che $T \vdash \phi \iff \gamma^*$. □

Per applicare il risultato precedente a formule con variabili libere conviene considerare non il linguaggio L ma il linguaggio $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ espanso con nuove costanti x_i (poi vedremo come sostituirle con delle variabili). Sia $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ un insieme di ennunciati in questo linguaggio espanso e consideriamo due strutture in questo linguaggio espanso che siano in realazione $\equiv_\Gamma$. Questo equivale a dire che abbiamo due L-strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e due n-uple $a_1, \ldots, a_n$ da A e $b_1, \ldots, b_n$ da B (che interpretano le x_i), tali che $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv_\Gamma \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$, cioè per ogni $\gamma(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma$ si ha $\mathcal{A} \models \gamma(a_1, \ldots, a_n)$ sse $\mathcal{B} \models \gamma(b_1, \ldots, b_n)$. Per il risultato precedente applicato a questo linguaggio espanso abbiamo:

75 Teorema. *Sia T una L-teoria, sia $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ un insieme non vuoto di $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$-enunciati chiusi per connettivi booleani, e sia $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ un $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$-enunciato. Supponiamo che per ogni coppia $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ di modelli di T e per ogni scelta di n-uple da questi modelli, $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv_\Gamma \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ implica $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv_\phi \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$. Allora esiste $\gamma(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma$ tale che $T \models \forall \vec{y} \phi(\vec{y}) \iff \gamma(\vec{y})$.*

Proof. Per il teorema precedente $T \models \phi(x_1, \ldots, x_n) \iff \gamma(x_1, \ldots, x_n)$. Ora poichè le costanti x_i non compaiono tra gli assiomi di T le possiamo sostituire con variabili e quantificarle universalmente. □

Diciamo che una L-teoria T *ammette eliminazione dei quantificatori* se e solo se per ogni L-formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ esiste una L-formula senza quantificatori $\gamma(x_1, \ldots, x_n)$ tale che $T \models \forall \vec{x}(\gamma(\vec{x}) \iff \phi(\vec{x}))$.

76 Osservazione. Se T ammette eliminazione dei quantificatori, allora per ogni coppia $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ di modelli di T se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ allora $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Proof. Basta osservare che le formule senza quantificatori sono
preservate sia verso l'alto che verso il basso. □

I risultati precedenti possono essere utilizzati per mostrare che una teoria
T ammette EQ. Basta prendere come Γ l'insieme delle fomule
senza quantificatori e mostrare che per modelli di T, la

relazione $\equiv_\Gamma$ implica $\equiv$. In effetti non è necessario considerare tutti i modelli di T, basta considerare solo quelli ω-saturi e sfruttare poi il fatto che ogni modello ammette una estensione elementare ω-satura. Ricordiamo che $\equiv_0$ significa $\equiv_\Gamma$ dove Γ è l'insieme delle formule senza quantificatori.

77 Teorema. *Supponiamo che per ogni coppia di modelli ω-saturi $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ di T e per ogni scelta di n-uple da A e B, $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv_0 \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ implica $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$. Allora T ammette EQ.*

Proof. Sia $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una formula. Per i risultati precedenti basta mostrare che $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv_0 \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ implica $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$. Poichè ogni modello ammette una estensione elementare ω-satura possiamo rimpiazzare $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ con modelli ω-saturi e usare le ipotesi del teorema. □

Ricordiamo che $\sim_\infty$ è la relazione di equivalenza infinita nei giochi di Erehnfeucth-Fraisse (che implica la equivalenza elementare $\equiv$). Nell'applicare il teorema precedente può convenire tentare di dimostrare $\sim_\infty$ piuttosto che $\equiv$. Quindi una tecnica per mostrare la eliminazione dei quantificatori è quella di mostrare che la relazione $\equiv_0$ gode della proprietà del va e vieni infinito in modelli ω-saturi di T. Più esplicitamente dobbiamo mostrare che se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono modelli ω-saturi di T e $\vec{a}$, $\vec{b}$ sono due n-uple da A, B rispettivamente tali che $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv_0 \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$, allora per ogni $a' \in A$ esiste $b' \in B$ tale che $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n, a' \equiv_0 \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n, b'$, e similmente con il ruolo di $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ scambiati. Vedremo nel seguito qualche applicazione di questa tecnica.

11 Algebre di Boole

La teoria delle algebre di Boole non ammette la eliminazione dei quantificatori nel linguaggio delle algebre di Boole $\cup, \cap, \neg, 0, 1,$. Ad esempio il predicato "x è un atomo" (cioè $x > 0 \land \neg\exists y(0 < y < x)$) non è esprimibile senza quantificatori.

78 Teorema. *La teoria delle algebre di Boole senza atomi è completa ed ammette EQ nel linguaggio $\cup, \cap, \neg, 0, 1,$.*

Proof. Motriamo che la relazione $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv_0 \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ gode della proprietà del va e vieni infinito ($\mathcal{A}, \mathcal{B}$ algebre di Boole senza atomi). Sia $a \in A$. Dobbiamo trovare $b \in B$ con $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n, a \equiv_0 \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n, b$. Possiamo supporre che tutti gli a_i e i b_i siano diversi da 0 altrimenti li possiamo eliminare dalla lista (usando il fatto che 0 è nel linguaggio). Consideriamo una scelta di segni $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{+1, -1\}$ e poniamo $\varepsilon_i a_i = a_i$ se $\varepsilon_i = +1$, e $\varepsilon_i a_i = \neg a_i$ se $\varepsilon_i = -1$. Sapere per le varie scelte di segni ε se gli elementi $a \cap \varepsilon_1 a_1 \cap \ldots \cap \varepsilon_n a_n$ e $\neg a \cap \varepsilon_1 a_1 \cap \ldots \cap \varepsilon_n a_n$ sono uguali o diversi da 0 significa sapere come a è situato rispetto agli a_i rispetto alle formule senza quantificatori. In altre parole se ϕ è senza quantificatori $\phi(a, a_1, \ldots, a_n)$ equivale alla disgiunzione di alcune condizioni del tipo suddetto. (Ad esempio la formula senza quantificatori $a \cap (a_1 \cup a_2) \neq 0$ equivale alla disgiunzione delle due formule $a \cup a_1 \neq 0$ e $a \cup a_2 \neq 0$.) Vogliamo trovare $b \in B$ che sia situato nello stesso modo rispetto ai b_i. Quindi dobbiamo scegliere un b tale che per ogni scelta di segni l'intersezione di b con $\varepsilon_1 b_1 \cap \ldots \cap \varepsilon_n b_n$ sia uguale o diversa da 0 a seconda che sia uguale o diversa da 0 l'intersezione di a con $\varepsilon_1 a_1 \cap \ldots \cap \varepsilon_n a_n$, e similmente per $\neg b$. Questo è possibile perchè in un'algebra senza atomi ogni elemento non nullo è decomponibile nella unione disgiunta di due elementi non nulli. □

Un algebra di Boole si dice *atomica* se ogni elemento maggiora un atomo, cioè un elemento x maggiore di 0 e tale che $\neg\exists y(0 < y < x)$. Ad esempio l'algebra delle parti di un insieme è atomica (gli atomi sono gli insiemi costituiti da un solo elemento), e ogni algebra finita è atomica. In un algebra atomica due elementi sono uguali se e solo se maggiorano gli stessi atomi (se $x \neq y$ la differenza simmetrica $(x \cap \neg y) \cup (\neg x \cap y)$ maggiora un atomo). Quindi un algebra di Boole atomica può essere pensata a meno di isomorfismi come una sottoalgebra dell'insieme delle parti dei suoi atomi.

Introduciamo infiniti nuovi simboli di predicato unario $A_1, A_2, A_3, \ldots$ e interpretiamo $A_n(x)$ in una algebra di boole $\mathcal{B}$ come il predicato che esprime il fatto che x maggiora esattamente n atomi. In particolare $A_1(x)$ sse x è un atomo.

79 Teorema. *La teoria delle algebre di Boole atomiche è completa. Essa elimina i quantificatori nel linguaggio espanso $\cup, \cap, \neg, 0, 1, A_1, A_2, A_3, \ldots$.*