La nozione di dimensione nelle teorie $\mathcal{O}$-minimali rispetta alcune buone proprietà

Gianluca Basso

Sommario

In analogia con le strutture **fortemente minimali**, vogliamo definire una nozione degli dimensione di insiemi definibili. Per farlo, dobbiamo anzitutto definire la **chiusura algebrica model-teoretica** di un insieme e quindi dimostrare che nelle strutture **$\mathcal{O}$-minimali** vale la proprietà dello **scambio di Steinitz** per la chiusura algebrica model-teoretica. Avendo definito dunque definito una nozione di **dimensione** possiamo dimostrare alcune sue buone proprietà.

1 $\mathcal{O}$-minimalità

Iniziamo con la definizione di **struttura $\mathcal{O}$-minimale** .

Definizione 1.1. Sia L un linguaggio con un simbolo di relazione binaria $<$ e sia M una L-struttura in cui $<$ è interpretato come un ordine totale. Allora M si dice **$\mathcal{O}$-minimale** se ogni $X \subset \mathrm{dom}(M)$ definibile (a parametri) è unione di un numero finito di intervalli e di punti.

2 Scambio di Steinitz

Abbiamo la seguente definizione, in analogia con in polinomi:

Definizione 2.1. Sia M una L-struttura e $A \subset \mathrm{dom}(M)$. Una L_A-formula $\varphi(x)$ è **algebrica** se definisce un insieme finito.

Definizione 2.2. Sia M una L-struttura e $A \subset \mathrm{dom}(M)$. La **chiusura model-teoretica** di A è

$$\mathrm{acl}(A) = \{b \in \mathrm{dom}(M) \mid \exists\varphi(x)\ L_A\text{-formula algebrica tale che } M \models \varphi(b)\}$$

Diciamo che b è **algebrico** su A se $b \in \mathrm{acl}(A)$.

Possiamo estendere la definizione considerando anche dei parametri. Diciamo che b è **algebrico su A con parametri da** $B \subset \mathrm{dom}(M)$ e scriviamo $b \in \mathrm{acl}(A/B)$ se $b \in \mathrm{acl}(A \cup B)$.

In una struttura $\mathcal{O}$-minimale (e più in generale in una struttura in cui si può definire un ordine totale) la nozione di **essere algebrico su** A è equivalente a quella di essere A**-definibile**[1]:

Definizione 2.3. Sia M una L-struttura e $A \subset \mathrm{dom}(M)$. L'elemento $b \in \mathrm{dom}(M)$ si dice A**-definibile**, in simboli $b \in \mathrm{dcl}(A)$, se b è l'unico elemento di un insieme definibile da una L_A-formula. Riformulando:

$$\mathrm{dcl}(A) = \{b \in \mathrm{dom}(M) \mid \exists \varphi(x)\ L_A\text{-formula tale che } M \models \varphi(b) \wedge \exists! x M \models \varphi(x)\}$$

Osservazione 1. Sia M una struttura $\mathcal{O}$-minimale e sia $X \subset \mathrm{dom}(M)$ un insieme A-definibile. Allora, per la definizione di $\mathcal{O}$-minimale X è unione finita di punti e intervalli. Vediamo che **i punti e gli estremi degli intervalli** (se finiti) **sono** A**-definibili**. Sia $\varphi(x)$ la L_A-formula che definisce X. Allora possiamo definire le formule $\sigma(x)$, che definisce i punti e gli estremi sinistri, e $\delta(x)$, che definisce i punti e gli estremi destri, in questo modo:

$$\sigma(x) \equiv \varphi(x) \wedge \exists y < x[\neg\varphi(y) \wedge \forall z > y(z < x \to \neg\varphi(z))]$$
$$\delta(x) \equiv \varphi(x) \wedge \exists y > x[\neg\varphi(y) \wedge \forall z < y(z > x \to \neg\varphi(z))]$$

Ne segue che **i punti e gli estremi sono algebrici su** A**.** Ma abbiamo già visto che algebrico su A implica A-definibile in una struttura $\mathcal{O}$-minimale e quindi concludiamo.

Volgiamo dimostrare che in una struttura $\mathcal{O}$-minimale M vale la **proprietà dello scambio di Steinitz**:

$$b \in \mathrm{acl}(\{c\} \cup A)\ \wedge\ b \notin \mathrm{acl}(A) \text{ allora } c \in \mathrm{acl}(\{b\} \cup A) \tag{1}$$

per $A \subset \mathrm{dom}(M)$ e $b, c \in \mathrm{dom}(M)$.

Abbiamo bisogno del seguente teorema, la cui dimostrazione può essere trovata in [?MR833697] o [?MR1633348].

Teorema 2.1 (di Monotonicità a tratti)**.** Sia M una L-struttura $\mathcal{O}$-minimale e $A \subset \mathrm{dom}(M)$. Sia f una funzione unaria A-definibile da un intervallo (a, b) di $\mathrm{dom}(M)$, con $a, b \in \mathrm{acl}(A)$ o uguali a $\pm\infty$, in $\mathrm{dom}(M)$. Allora esistono $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{dom}(M)$ tali che

- $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n < b = b_{n+1}$ e $a_1, \ldots, a_n$ sono A-definibili.
- f è continua su ciascun intervallo (a_i, a_{i+1})
- f è costante o monotona su ciascun intervallo (a_i, a_{i+1}).

[1] si passa facilmente dalla formula algebrica a quella che definisce un solo elemento applicando un numero finito di volte formule che prendono o escludono il massimo.

Procediamo ora alla dimostrazione che in una struttura O-minimale vale la proprietà **??**.

Dimostrazione. Per ricondurci al precedente teorema, consideriamo una funzione unaria f A-definibile tale che $f(c) = b$: dalla condizione $b \in \mathrm{acl}(\{c\} \cup A)$ ottengo $b \in \mathrm{dcl}(\{c\} \cup A)$. Esiste dunque una L_A-formula $\varphi(x, y)$ tale che $M \models \varphi(b, c)$ e $\exists! x\ M \models \varphi(x, c)$. Definisco

$$\psi(x, y) \equiv \varphi(x, y) \wedge \exists! z\, \varphi(z, y)$$

Noto che

- $\psi(x, y)$ è una formula funzionale nella seconda variabile.
- per ipotesi $M \models \psi(b, c)$.

Ora posso definire una funzione unaria parziale $f : \mathrm{dom}(M) \to \mathrm{dom}(M)$:

$$f(y) = x \iff M \models \psi(x, y)$$

Sia (a_0, a_n) l'intervallo massimale (eventualmente $a_0 = a_n = c$) contente c sul quale f è definita dappertutto. Notiamo anzitutto che gli estremi dell'intervallo sono A-definibili per quanto detto nell'osservazione **??**. Per il teorema **di monotonicità a tratti** esistono $a_1, \ldots, a_{n-1}$ tale che f è costante o monotona sugli intervalli (a_i, a_{i+1}). Ho i seguenti casi:

Caso 1. $c = a_i$. In questo caso c è A-definibile e, a maggior ragione, $c \in \mathrm{acl}(\{b\} \cup A)$.

Caso 2. c è interno ad un intervallo sul quale f è costante. Allora b non dipende da c e dunque $b \in acl(A)$, contro le nostre ipotesi.

Caso 3. c è interno ad un intervallo sul quale f è monotona (de)crescente. Allora posso invertire la funzione sull'intervallo e ottenere $c = f^{-1}(b)$. Infatti mi basta considerare la L_A-formula:

$$\xi(x, y) \equiv y \in (a_i, a_{i+1}) \wedge \forall z < x\ \neg\psi(z, y)$$

Notiamo che la sottoformula $y \in (a_i, a_{i+1})$ è una L_A-formula in quanto a_i, a_{i+1} sono A-definibili. Si ha dunque $c \in \mathrm{acl}(\{b\} \cup A)$. □

3 Dimensione

Seguendo le note [`?berardu:2014:Online`] abbiamo:

Definizione 3.1. Sia M una L-struttura $\mathcal{O}$-minimale , siano $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{dom}(M)$ e $B \subset \mathrm{dom}(M)$. Un sottoinsieme X di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ è detto **B-generante** se, per ogni a_i, si ha $a_i \in \mathrm{acl}(X \cup B)$, ed è detto **algebricamente indipendente su** B se

$$a_j \notin \mathrm{acl}(X \backslash \{a_j\} \cup B) \quad \forall a_j \in X$$

Infine X è detto una **B-base** se è sia generante che algebricamente indipendente su B.

Usando la proprietà dello scambio si dimostra:

Teorema 3.1. Tutte le B-basi di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ hanno la stessa cardinalità. Inoltre ogni insieme indipendente massimale è generante.

La seguente definizione è quindi ben posta:

Definizione 3.2. Sia M una L-struttura $\mathcal{O}$-minimale , siano $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{dom}(M)$ e $B \subset \mathrm{dom}(M)$. Allora $\dim(a_1, \ldots, a_n/B)$ è la cardinalità di una sua B-base.

Estendiamo ora la nozione di dimensione a insiemi definibili qualunque, restringendo però la nostra attenzione a strutture **ω-sature**.

Definizione 3.3. Sia M una L-struttura $\mathcal{O}$-minimale e ω-satura, siano $A \subset \mathrm{dom}(M)$ un insieme finito e $X \subset \mathrm{dom}(M)^n$ un insieme A-definibile. Allora

$$\dim(X) = \max\{\dim(\bar{a}/A) \mid \bar{a} \in X\}$$

Si dimostra che la dimensione di X **non dipende dall'insieme di parametri da cui è definita**.

Proposizione 3.2. Sia M una L-struttura $\mathcal{O}$-minimale e ω-satura, siano $A \subset \mathrm{dom}(M)$ un insieme finito e $X \subset \mathrm{dom}(M)^n$ un insieme A-definibile. Se $B \supset A$, allora esiste $\bar{b} \in X$ tale che $\dim(\bar{b}/B) = \dim(X) = \max\{\dim(\bar{a}/A) \mid \bar{a} \in X\}$.

Dimostrazione. Infatti, mi basta vedere che per ogni n-upla $\bar{a} \in X$ tale che $\dim(\bar{a}/A) = m \leq n$ esiste un elemento $\bar{b} \in X$ tale che $\dim(\bar{b}/B) \geq m$. Per induzione sulla dimensione di $\dim(\bar{a}/A)$.

Passo base: Suppongo, a meno di riordinare $\bar{a}$, che $\{a_1\}$ sia la base di $\bar{a}$. Al tipo di a_1 a parametri in $A \cup \{a_2, \ldots, a_n\}$ aggiungo tutte e sole le L_B-formule del tipo:

$$\neg\psi(x)$$

con ψ formula algebrica. Dico che è un tipo: considero una congiunzione finita di formule. Essendo negazioni di formule algebriche, ognuna è realizzata da infiniti elementi. Se la loro congiunzione definisse l'insieme vuoto, passando ai complementari otterrei che

$$\psi_1(x) \vee \cdots \vee \psi_k(x)$$

definirebbe tutto M. Ma è una disgiunzione di un numero finito di formule algebriche. Assurdo. Per ω-saturazione esiste b che realizza questo tipo, e quindi $\dim(b, a_2, \ldots, a_n/B) \geq 1$.

Passo induttivo Valga per m. Dimostriamolo per $m+1$. Sia quindi $\dim(a_1, \ldots, a_n/A) = m+1$ e, a meno di riordinare $\bar{a}$, siano $a_1, \ldots, a_{m+1}$ algebricamente indipendenti. Quindi ho $\dim(a_1, \ldots, a_m/A) = m$ e per ipotesi induttiva posso trovare $b_1, \ldots, b_m$ tali che $\dim(b_1, \ldots, b_m)/B) = m$ e $(b_1, \ldots, b_m) \models \mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_m/A)$. Ora devo trovare b tale che $\dim(b_1, \ldots, b_m, b/B) = m+1$ e $(b_1, \ldots, b_m, b) \models \mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}/A)$. Per fare ciò, considero il tipo di a_{m+1} a parametri in $A \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$ e aggiungo al tipo tutte e sole le formule di $L \cup \{b_1, \ldots, b_m\}$ della forma:

$$\neg\psi(x)$$

con $\psi(x)$ formula algebrica. Ripetendo le argomentazioni del passo base ho che questo insieme di formule è un tipo (parziale). Per la saturazione di M il tipo è realizzato da un elemento b e vale $\dim(b_1, \ldots, b_m, b, a_{m+2}, \ldots, a_n/B) \geq m+1$.

□

4 Proprietà della dimensione

Notiamo anzitutto che la dimensione dell'unione di finiti insiemi B-definibili è il massimo delle loro dimensioni.

Osservazione 2. Siano $X_1, \ldots, X_n$ insiemi B-definibili. Allora

$$\begin{aligned}\dim\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) &= \max\left\{\dim(\bar{a}/B) \;\middle|\; \bar{a} \text{ tupla finita di elementi di } \bigcup_{i=1}^{n} X_i\right\} = \\ &= \max\{\dim(X_i)\}\end{aligned}$$

Proposizione 4.1. Siano $a \in M$, $\bar{b}$ una tupla di elementi di M e sia $A \subseteq M$. Allora vale

$$\dim(a\bar{b}/A) = \dim(a/\{\bar{b}\} \cup A) + \dim(\bar{b}/A)$$

Dimostrazione. Sia B una base di $\bar{b}$. Abbiamo due casi:
Caso 1. $a \in \mathrm{acl}(\bar{b})$. Allora $\dim(a/\{\bar{b}\} \cup A) = 0$ e $\dim(a\bar{b}/A) = \dim(\bar{b}/A)$ perché B è anche una base di $a\bar{b}$.
Caso 2. $a \notin \mathrm{acl}(\bar{b})$. Allora $\dim(a/\{\bar{b}\} \cup A) = 1$. Devo dimostrare che $\{a\} \cup B$ è una base di $a\bar{b}$, e poi ho finito.

Algebricamente indipendente: si ha $a \notin \mathrm{acl}(B/A)$. Se $b_i \in B$, allora se per assurdo $b_i \in \mathrm{acl}(\{a\} \cup B \backslash \{b_i\} \cup A)$ allora, poiché $b_i \notin \mathrm{acl}(B \backslash \{b_i\} \cup A)$, per la proprietà dello scambio ottengo: $a \in \mathrm{acl}(B/A)$. Assurdo.

*A***-generante:** ovvio.

□

Osservazione 3. Posso estendere la scorsa proprietà anche al caso di una tupla $\bar{a}$:

$$\dim(\bar{a}\bar{b}/A) = \dim(\bar{a}/\{\bar{b}\} \cup A) + \dim(\bar{b}/A)$$

Dimostrazione. Tralasciamo per comodità l'insieme A dei parametri. Sia $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n$ e sia $\tilde{A}$ una $\bar{b}$-base di $\bar{a}$, di cardinalità m. Riordiniamo $\bar{a}$ in modo che gli ultimi m elementi siano quelli della base. Ora, noto che $\dim(\bar{a}\bar{b}) = \dim(a_1/a_2, \ldots, a_n, \bar{b}) + \dim(a_2, \ldots, a_n, \bar{b})$. Iterando ottengo:

$$\dim(\bar{a}\bar{b}) = \left(\sum_{i=1}^{m-n-1} \dim(a_i/a_{i+1}, \ldots, a_n, \bar{b}) + \sum_{i=m-n}^{n} \dim(a_i/a_{i+1}, \ldots, a_n, \bar{b}) \right) + \dim(\bar{b})$$

Ma

$$\sum_{i=1}^{m-n-1} \dim(a_i/a_{i+1}, \ldots, a_n, \bar{b}) = 0$$

perché $\tilde{A}$ è $\bar{b}$-generante. Inoltre

$$\sum_{i=m-n}^{n} \dim(a_i/a_{i+1}, \ldots, a_n, \bar{b}) = m$$

perché $\tilde{A}$ è algebricamente indipendente. Ottengo dunque:

$$\dim(\bar{a}\bar{b}) = m + \dim(\bar{b}) = \dim(\bar{a}/\{\bar{b}\}) + \dim(\bar{b})$$

□

Proposizione 4.2. Sia $X \subseteq \mathrm{dom}(M)^k$ un insieme B-definibile e sia $f : X \to Y \subseteq \mathrm{dom}(M)^l$ una bigezione C-definibile. Allora $\dim(X) = \dim(f(X))$.

Dimostrazione. Sia $A = B \cup C$. Allora X e f sono A-definibili. Sia $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n \in X$, $\bar{c} \in f(X)$ e scriviamo $f(\bar{a})$ in luogo di $f(a_1), \ldots, f(a_n)$. Vogliamo dimostrare che f e f^{-1} portano basi di $\bar{a}$ in basi di $f(\bar{a})$ e viceversa. Fatto ciò, segue subito $\dim(\bar{a}/A) = \dim(f(\bar{a})/A)$ e $\dim(\bar{c}/A) = \dim(f^{-1}(\bar{c})/A)$. Poiché, poi, vale per qualsiasi tupla finita di X e di $f(X)$, vale anche per il massimo, quindi $\dim(X) = \dim(f(X))$. Dimostriamo quindi che se $\bar{b} = b_1, \ldots, b_s$ è una base di $\bar{a}$ allora $f(\bar{b})$ è una base di $f(\bar{a})$ (il viceversa è analogo, basta usare f^{-1} in luogo di f).

$f(\bar{b})$ **è** A**-generante?** Sappiamo che $a_i \in \text{acl}(\bar{b} \cup A)$ Allora, poiché f è A-definibile, anche $f(a_i) \in \text{acl}(\bar{b} \cup A)$. Ma, considerato che f^{-1} è A-definibile, da $f(b_j)$, per mezzo di una L_A-formula, posso definire b_j. Per cui $f(a_i) \in \text{acl}(f(\bar{b}) \cup A)$ e dunque $f(\bar{b})$ è generante.

$f(\bar{b})$ **è algebricamente indipendente su** A**?** Sappiamo che $b_j \notin \text{acl}(\bar{b}\backslash\{b_j\} \cup A)$. Se, per assurdo $f(b_j) \in \text{acl}(\bar{b}\backslash\{b_j\} \cup A)$ allora, ricordando che f^{-1} è A-definibile, potrei definire $f^{-1}(f(b_j)) = b_j$ con una L_A-formula. Qundi $f(b_j) \notin \text{acl}(\bar{b}\backslash\{b_j\}\cup A)$. Ma $\text{acl}(\bar{b}\backslash\{b_j\}\cup A) \subseteq \text{acl}(f(\bar{b})\backslash\{f(b_j)\}\cup A)$, quindi $f(b_j) \notin \text{acl}(f(\bar{b})\backslash\{f(b_j)\}\cup A)$ e dunque $f(\bar{b})$ è algebricamente indipendente su A. □

Ora possiamo dimostrare la seguente.

Proposizione 4.3. Sia $X \subseteq \text{dom}(M)^k$ un insieme B-definibile e $f : X \to Y \subseteq \text{dom}(M)^l$ una funzione C-definibile. Allora $\dim(X) \geq \dim(f(X))$.

Dimostrazione. Sia $A = B \cup C$. Consideriamo la seguente funzione A-definibile: $g : x \mapsto (x, f(x))$. Ho che g è una bigezione tra $X \subseteq \text{dom}(M)^k$ e $X \sqcup f(X) \subseteq \text{dom}(M)^k \times \text{dom}(M)^l$. Dunque, per la proposizione **??** ho:

$$\begin{aligned}\dim(X) &= \dim(X \sqcup f(X)) = \dim((X,0) \cup (0, f(X))) = \\ &= \max\{\dim((X,0)), \dim((0,f(X))\} = \max\{\dim(X), \dim(f(X))\}\end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Per ultimo dimostriamo che la dimensione è additiva:

Proposizione 4.4. Siano $X \subseteq \text{dom}(M)^n$ C-definibile e $Y \subseteq \text{dom}(M)^m$. Se $f : X \to Y$ è C-definibile **surgettiva** e $\forall y \in Y$ $\dim(f^{-1}(y)) = k$, allora

$$\dim(X) = \dim(Y) + k$$

Dimostrazione. Sia $A = B \cup B$. Dimostriamo che $\dim(X) \geq \dim(Y) + k$. A tal fine, sia $\bar{b} \in Y$ un **elemento generico**, ovvero tale che $\dim(\bar{b}/A) = \dim(Y)$. Trovo nella fibra di $\bar{b}$ un elemento generico, sia $\bar{a}$. Allora

$$\dim(\bar{a}/\{\bar{b}\} \cup A) = k$$

Per la proposizione **??** ho:

$$\dim(\bar{a}\bar{b}/A) = \dim(\bar{a}/\{\bar{b}\} \cup A) + \dim(\bar{b}/A) \tag{2}$$

Allora, notando che $\dim(\bar{a}\bar{b}/A) = \dim(\bar{a}/A)$ perché $\bar{b}$ è A-definibile a partire da $\bar{a}$, ottengo che

$$\dim(\bar{a}/A) = k + \dim(Y)$$

ovvero ho trovato un elemento di X di dimensione $k+\dim(Y)$. La dimensione di X è maggiore o uguale della dimensione di un suo elemento: $\dim(X) \geq \dim(Y) + k$.
Dimostriamo che $\dim(X) \leq \dim(Y) + k$. Sia $\bar{a} \in X$ un elemento generico di X. Sia $\bar{b}$ la sua immagine attraverso f. Ovviamente $\bar{a}$ appartiene alla fibra di $\bar{b}$. Da **??**, ottengo

$$\dim(X) = \dim(\bar{a}/\{\bar{b}\} \cup A) + \dim(\bar{b}/A)$$

Ma $\dim(\bar{a}/\{\bar{b}\} \cup A) \leq k$, quindi

$$\dim(Y) \geq \dim(\bar{b}/A) \geq \dim(X) - k$$

che conclude la dimostrazione. □

Riferimenti bibliografici

[1] Alessandro Berarducci, *Modelli2014*, 2014. [`http://www.dm.unipi.it/~berardu/Didattica/2014SNS-modelli/`; accessed 12-May-2014].

[2] Anand Pillay and Charles Steinhorn, *Definable sets in ordered structures. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **295** (1986), no. 2, 565–592. MR833697 (88b:03050a)

[3] Lou van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 248, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. MR1633348 (99j:03001)