Fattorizzazioni LU e QR

Dario A. Bini, Università di Pisa

27 settembre 2019

Sommario

Questo modulo didattico contiene risultati e proprietà relativi alle fattorizzazioni LU e QR di una matrice. Si danno condizioni di esistenza e unicità della fattorizzazione LU e si mostra l'utilità di queste fattorizzazioni nella risoluzione di sistemi lineari.

Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, dove A è una matrice $n \times n$ non singolare e $b \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei termini noti. Se la matrice A è triangolare inferiore, cioè se $a_{i,j} = 0$ per $i < j$, allora il sistema può essere facilmente risolto mediante il metodo di *sostituzione in avanti* definito dalle seguenti formule

$$\begin{aligned} &x_1 = b_1/a_{1,1}, \\ &x_i = (b_i - \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j)/a_{i,i}, \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

In base a queste formule x_1 si ricava dalla prima equazione e si sostituisce nelle altre, x_2 si ricava dalla seconda equazione e si sostituisce nelle successive e via di seguito finché si ricava x_n dall'ultima equazione. Queste formule richiedono n^2 operazioni aritmetiche. Inoltre è facile dimostare che queste formule sono numericamente stabili all'indietro.

Un discorso analogo vale se la matrice è triangolare superiore, cioè se $a_{i,j} = 0$ se $i > j$. In questo caso le formule di risoluzione sono

$$\begin{aligned} &x_n = b_n/a_{n,n}, \\ &x_{n-i} = (b_{n-i} - \textstyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{n-i,j}x_j)/a_{n-i,n-i}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

che definiscono il metodo di *sostituzione all'indietro*. Anche queste formule richiedono un numero di operazioni aritmetiche pari a n^2 e sono numericamente stabili all'indietro.

Un'altra situazione favorevole si incontra quando A è una matrice unitaria. Infatti in questo caso l'inversa di A coincide con A^H per cui la soluzione del sistema si ottiene come $x = A^H b$ e può essere calcolata con $2n^2 - n$ operazioni aritmetiche e il calcolo è numericamente stabile all'indietro.

Nel caso in cui A è una matrice arbitraria non singolare si può cercare di fattorizzare A nel prodotto di due o più matrici per le quali la risoluzione del sistema originale sia più facile. Infatti, se $A = BC$ è una fattorizzazione di A, dove B e C sono matrici $n \times n$, allora il sistema $Ax = b$ può essere riscritto come una coppia di sistemi da risolvere in successione:

$$\begin{cases} By = b \\ Cx = y \end{cases}$$

Infatti la risoluzione del primo sistema ci fornisce il vettore y che viene successivamente usato come termine noto nel secondo sistema la cui soluzione x coincide con la soluzione del sistema originale.

Se le matrici B e C sono triangolari o unitarie allora si può trarre vantaggio da quanto detto sopra e risolvere i due sistemi con un costo computazionale proporzionale a n^2. Il costo complessivo della risoluzione del sistema originale è allora la somma dei costi della risoluzione dei due sistemi più il costo del calcolo della fattorizzazione $A = BC$.

Le fattorizzazioni di matrici più studiate in letteratura sono le seguenti:

- fattorizzazione $A = LU$, dove L è matrice triangolare inferiore con elementi diagonali uguali a 1, U è matrice triangolare superiore;
- fattorizzazione $A = PLU$, dove L ed U sono come sopra mentre P è matrice di permutazione;
- fattorizzazione $A = P_1LUP_2$, dove L e U sono come sopra mentre P_1, P_2 sono matrici di permutazione;
- fattorizzazione $A = QR$, dove Q è unitaria mentre R è triangolare superiore.

Forniamo ora una condizione di esistenza e unicità della fattorizzazione LU. Per questo è utile dare prima alcune definizioni.

Se $\Omega \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, la matrice di elementi $a_{i,j}$ con $i, j \in \Omega$ è detta *sottomatrice principale* di A. Una sottomatrice principale ha elementi diagonali che sono anche elementi diagonali di A. Se $\Omega = \{1, 2, \ldots, k\}$ la sottomatrice di elementi con indici in Ω viene detta *sottomatrice principale di testa* di A.

Teorema 1 *Se tutte le sottomatrici principali di testa $k \times k$ di A sono non singolari per $k = 1, \ldots, n-1$ allora esiste ed è unica la fattorizzazione LU di A.*

Dim.

Si procede per induzione su n. Per $n = 1$ non c'e' nulla da dimostrare poiché $L = (1)$, $A = U = (a_{1,1})$. Assumiamo vera la tesi per dimensione $n-1$ e la dimostriamo per dimensione n. Cerchiamo quindi una fattorizzazione $A = LU$ che scriviamo nella seguente forma dopo aver partizionato opportunamente le matrici in blocchi:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & b \\ \hline c^T & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & u_{n,n} \end{array}\right].$$

Uguagliando tra loro i quattro blocchi in entrambi i membri della espressione precedente si ottiene

$$
\begin{aligned}
A_{n-1} &= L_{n-1}U_{n-1}, \quad & b &= L_{n-1}y, \\
c^T &= x^T U_{n-1}, & a_{n,n} &= x^T y + u_{n,n}.
\end{aligned}
$$

Poiché A_{n-1} ha sottomatrici principali di testa non singolari, per l'ipotesi induttiva esistono uniche matrici L_{n-1} e U_{n-1} tali che $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$, dove L_{n-1} è triangolare inferiore con elementi diagonali uguali a 1, U_{n-1} è triangolare superiore. Inoltre, poiché L_{n-1} è triangolare con elementi diagonali uguali a 1, il suo determinante è uguale a 1 e quindi L_{n-1} è non singolare. Allora esiste unico il vettore $y = L_{n-1}^{-1}b$. Poiché $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$ e A_{n-1} è non singolare per ipotesi, anche U_{n-1} risulta non singolare, quindi esiste unico $x^T = c^T U_{n-1}^{-1}$. Infine $u_{n,n}$ è dato in modo univoco dalla relazione $u_{n,n} = a_{n,n} - x^T y$. □

La condizione di non singolarità delle sottomatrici principali di testa di A data nel teorema precedente non è necessaria per l'esistenza della fattorizzazione LU come mostra il semplice esempio

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

È facile dimostrare che se A è invertibile allora la condizione data nel teorema 1 è anche necessaria per l'esistenza della fattorizzazione LU. Si lascia questo per esercizio. Si può inoltre dimostrare che una fattorizzazione PLU esiste sempre qualunque sia la matrice A. Cioè permutando le righe di una qualsiasi matrice A in modo opportuno ci si può ricondurre ad una matrice che ammette una fattorizzazione LU.

Vedremo in un altro articolo come si possono costruire e analizzare algoritmi per il calcolo della fattorizzazione LU di una matrice A.

Per quanto riguarda la fattorizzazione QR daremo un metodo che calcola tale fattorizzazione qualunque sia la matrice A. Quello che è evidente è che la fattorizzazione QR non è unica. Ciò si vede con questo semplice ragionamento. Se $A = QR$ è una tale fattorizzazione e se D è una qualsiasi matrice diagonale con elementi di modulo 1 sulla diagonale principale, allora D è sia unitaria che triangolare superiore per cui $A = QDD^{-1}R = \widehat{Q}\widehat{R}$ con $\widehat{Q} = QD$, $\widehat{R} = D^{-1}R$ è ancora una fattorizzazione QR di A. Infatti $\widehat{Q}$ unitaria come prodotto di matrici unitarie e $\widehat{R}$ triangolare superiore come prodotto di matrici triangolari superiori.

Se A è invertibile allora si può dimostrare che la fattorizzazione QR è unica a meno di trasformazioni ottenute mediante matrici diagonali unitarie. Infatti, se $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$, dall'ipotesi di nonsingolarità segue che $Q_2^H Q_1 = R_2R_1^{-1}$. Quindi la matrice triangolare superiore $R_2R_1^{-1}$ è unitaria ed è facile verificare che le uniche matrici triangolari unitarie sono quelle diagonali.

Esercizi

1. Si dimostri che se A è fortemente dominante diagonale allora esiste ed è unica la fattorizzazione LU di A.

2. Si dimostri che se A è hermitiana e definita positiva allora esiste ed è unica la fattorizzazione LU di A.

3. Si dimostri che se A è hermitiana e definita positiva allora esiste la fattorizzazione $A = LDL^T$, dove D è matrice diagonale con elementi diagonali positivi ed L è triangolare inferiore con elementi diagonali uguali a 1.

Riferimenti bibliografici

[1] D. Bini, M. Capovani, O. Menchi. Metodi Numerici per l'Algebra Lineare. Zanichelli, Bologna 1988.