Esercizi sui numeri complessi

Lorenzo Brasco

9 Ottobre 2007

Esercizio 1 *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione*

$$z^2 + 1 = 0.$$

`Soluzione` Posto $z = x + iy$, la nostra equazione diventa $(x + iy)^2 = -1$, ovvero

$$(x^2 - y^2) + 2ixy = -1,$$

che sarà verificata se x e y sono soluzioni (reali!) del sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= -1 \\ 2xy &= 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ci dice che almeno uno tra x e y deve annullarsi: nel primo caso si ha

$$\begin{cases} y^2 &= 1 \\ x &= 0 \end{cases}$$

ovvero $x = 0$ e $y = \pm 1$, mentre nel secondo caso non si ottengono soluzioni. Quindi

$$z = \pm i,$$

sono le soluzioni cercate. $\diamond$

Esercizio 2 *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione*

$$z^2 - \overline{z}^2 = 4i.$$

`Soluzione` Posto $z = x + iy$, la nostra equazione diventa $(x + iy)^2 - (x - iy)^2 = 4i$, ovvero

$$x^2 - y^2 + 2ixy - x^2 + y^2 + 2ixy = 4i,$$

cioè

$$4ixy = 4i,$$

da cui $xy = 1$. L'insieme S delle soluzioni della nostra equazione, è quindi un insieme *infinito*, dato da

$$S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \ : \ xy = 1 \ \}.$$

Si provi a disegnare nel piano cartesiano l'insieme S. $\diamond$

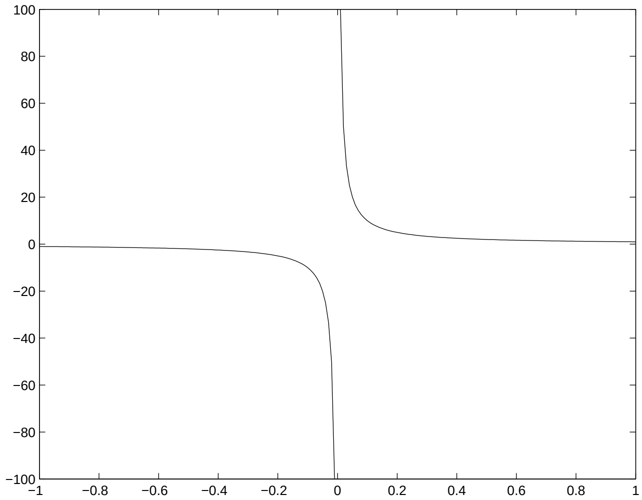

Figura 1: L'insieme delle soluzioni S dell'Esercizio 2.

Esercizio 3 *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione*

$$z^2 = \overline{z}.$$

`Soluzione` Di nuovo, si pone $z = x + iy$ e si ottiene l'equazione

$$x^2 - y^2 + 2ixy = x - iy.$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= x \\ 2xy &= -y \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x^2 &= x \\ y &= 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y^2 &= 3/4 \\ 2x &= -1 \end{cases}$$

ovvero abbiamo le seguenti 4 soluzioni:

$$z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\diamond$

Esercizio 4 *Trovare le soluzioni in* $\mathbb{C}$ *dell'equazione*

$$z^6 - z^3 + 1 = 0.$$

`Soluzione` Posto $w = z^3$, la nostra equazione diventa

$$w^2 - w + 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono date da

$$w_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Ora, $w_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, da cui, dovendo risultare $z = \sqrt[3]{w}$, si ha

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{9}},\ z_2 = e^{i\frac{7}{9}\pi},\ z_3 = e^{i\frac{13}{9}\pi},$$

ed analogamente, essendo $w_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5}{3}\pi}$, si ha

$$z_4 = e^{i\frac{5}{9}\pi},\ z_5 = e^{i\frac{11}{9}\pi},\ z_6 = e^{i\frac{17}{9}\pi}.$$

$\diamond$

Esercizio 5 *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione*

$$z^n = 1.$$

`Soluzione` Dal momento che 1 ha modulo $\rho = 1$ e argomento $\theta = 0$, si avrà

$$z_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1.$$

In generale, le radici n-esime dell'unità rappresentano i vertici di un poligono regolare con n-lati, inscritto nella circonferenza di raggio 1 e con un vertice in $(1, 0)$ (si veda la Figura 3). $\diamond$

Esercizio 6 *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione*

$$z^2 + |z|^2 = \sqrt{2}z|z|.$$

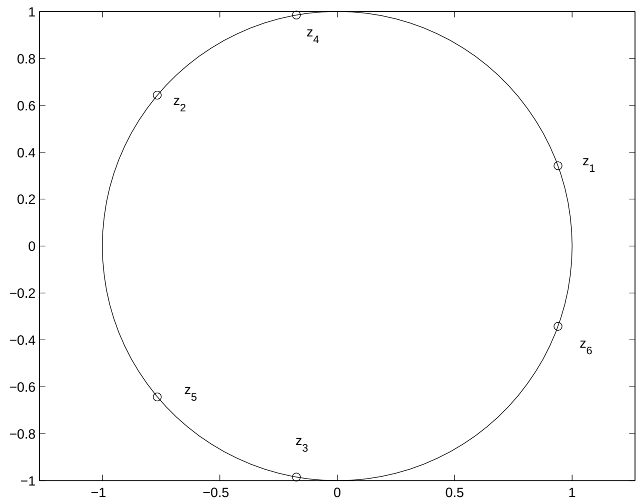

Figura 2: Le soluzioni dell'Esercizio 4.

`Soluzione` Notiamo innanzitutto che $z = 0$ è una soluzione della nostra equazione. Per trovare le altre, possiamo supporre che sia $z \neq 0$ e dividere l'equazione di partenza per $|z|^2$, ottenendo

$$\left(\frac{z}{|z|}\right)^2 + 1 = \sqrt{2}\frac{z}{|z|},$$

ovvero abbiamo ottenuto un'equazione algebrica del secondo ordine nell'incognita $t = \frac{z}{|z|}$, data da

$$\begin{cases} t^2 - \sqrt{2}t + 1 &= 0, \\ |t| &= 1, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}.$$

Abbiamo quindi che, tutte le soluzioni non nulle dell'equazione in esame, devono verificare

$$z = |z|\frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2},$$

ovvero, scrivendo $z = x + iy$, dovrà risultare

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) + i\left(y \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0,$$

e quindi

$$\begin{cases} x &= \sqrt{x^2+y^2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y &= \pm\sqrt{x^2+y^2}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

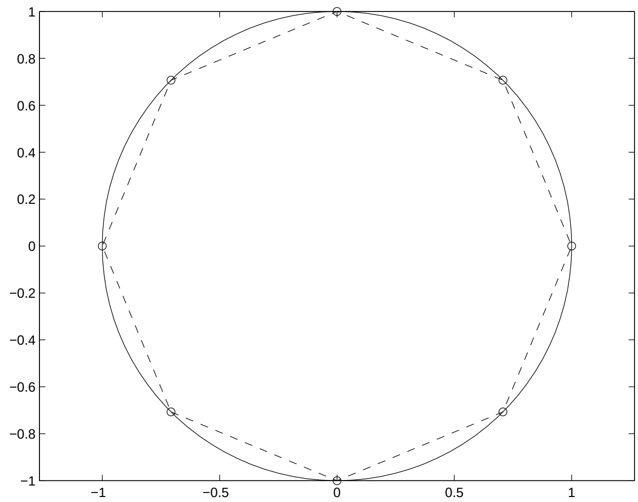

Figura 3: Radici n-esime dell'unità nel caso $n = 8$.

In definitiva, deve risultare

$$\begin{cases} x & \geq & 0 \\ y & = & \pm x \end{cases}$$

e l'insieme delle soluzioni S è quindi dato da

$$S = \{z = x + iy \ : \ x \geq 0, \ y = x\} \cup \{z = x + iy \ : \ x \leq 0, \ y = -x\}.$$

$\diamond$

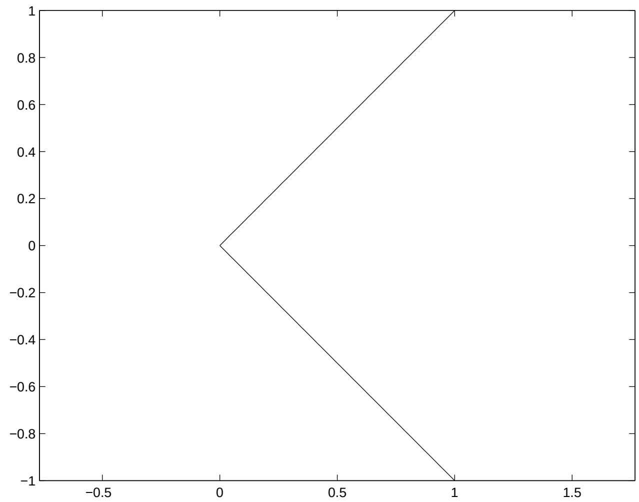

Figura 4: L'insieme delle soluzioni S dell'Esercizio 6.