

ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI

LORENZO BRASCO

Esercizio 1. *Risolvere in \mathbb{C} l'equazione*

$$z^2 + 1 = 0.$$

Soluzione Posto $z = x + iy$, la nostra equazione diventa $(x + iy)^2 = -1$, ovvero

$$(x^2 - y^2) + 2ixy = -1,$$

che sarà verificata se x e y sono soluzioni (reali!) del sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ci dice che almeno uno tra x e y deve annullarsi: nel primo caso si ha

$$\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

ovvero $x = 0$ e $y = \pm 1$, mentre nel secondo caso non si ottengono soluzioni. Quindi

$$z = \pm i,$$

sono le soluzioni cercate. \diamond

Esercizio 2. *Risolvere in \mathbb{C} l'equazione*

$$z^2 - \bar{z}^2 = 4i.$$

Soluzione Posto $z = x + iy$, la nostra equazione diventa $(x + iy)^2 - (x - iy)^2 = 4i$, ovvero

$$x^2 - y^2 + 2ixy - x^2 + y^2 + 2ixy = 4i,$$

cioè

$$4ixy = 4i,$$

da cui $xy = 1$. L'insieme S delle soluzioni della nostra equazione, è quindi un insieme *infinito*, dato da

$$S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : xy = 1\}.$$

Si provi a disegnare nel piano cartesiano l'insieme S . \diamond

Esercizio 3. *Risolvere in \mathbb{C} l'equazione*

$$(1) \quad z^2 = \bar{z}.$$

Soluzione Osserviamo innanzitutto che $z_1 = 0$ è sicuramente una soluzione. Osserviamo inoltre che ogni altra soluzione della nostra equazione, deve avere modulo unitario: infatti, se z è soluzione allora

$$z^2 = \bar{z} \implies |z^2| = |\bar{z}|$$

1

ed usando il fatto che $|z^2| = |z|^2$ e $|\bar{z}| = |\bar{z}|$, dalla precedente si ottiene che ogni soluzione della nostra equazione deve soddisfare

$$|z|^2 = |z|,$$

ovvero deve risultare $z = 0$ (che già sappiamo essere soluzione) oppure $|z| = 1$. Moltiplichiamo adesso l'equazione (1) per z , ottenendo

$$z^3 = z\bar{z},$$

d'altronde sappiamo che $z\bar{z} = |z|^2$ ed abbiamo appena dimostrato che ogni soluzione deve avere modulo unitario. Ne segue che le soluzioni cercate devono quindi soddisfare

$$z^3 = 1,$$

ovvero sono le radici terze dell'unità, che sono quindi date da

$$z_2 = 1, \quad z_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

In definitiva l'insieme delle soluzioni di (1) è dato da

$$S = \left\{ 0, 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Metodo alternativo Di nuovo, si pone $z = x + iy$ e si ottiene l'equazione

$$x^2 - y^2 + 2ixy = x - iy.$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x^2 = x \\ y = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y^2 = 3/4 \\ 2x = -1 \end{cases}$$

ovvero abbiamo le seguenti 4 soluzioni:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

◇

Esercizio 4. *Trovare le soluzioni in \mathbb{C} dell'equazione*

$$z^6 - z^3 + 1 = 0.$$

Soluzione Posto $w = z^3$, la nostra equazione diventa

$$w^2 - w + 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono date da

$$w_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Ora, $w_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, da cui, dovendo risultare $z = \sqrt[3]{w}$, si ha

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{9}}, \quad z_2 = e^{i\frac{7}{9}\pi}, \quad z_3 = e^{i\frac{13}{9}\pi},$$

ed analogamente, essendo $w_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5}{3}\pi}$, si ha

$$z_4 = e^{i\frac{5}{9}\pi}, z_5 = e^{i\frac{11}{9}\pi}, z_6 = e^{i\frac{17}{9}\pi}.$$

◇

Esercizio 5. Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$z^n = 1.$$

Soluzione Dal momento che 1 ha modulo $\rho = 1$ e argomento $\theta = 0$, si avrà

$$z_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}, k = 0, \dots, n-1.$$

In generale, le radici n -esime dell'unità rappresentano i vertici di un poligono regolare con n -lati, inscritto nella circonferenza di raggio 1 e con un vertice in $(1, 0)$. ◇

Esercizio 6. Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$z^2 + |z|^2 = \sqrt{2}z|z|.$$

Soluzione Notiamo innanzitutto che $z = 0$ è una soluzione della nostra equazione. Per trovare le altre, possiamo supporre che sia $z \neq 0$ e dividere l'equazione di partenza per $|z|^2$, ottenendo

$$\left(\frac{z}{|z|}\right)^2 + 1 = \sqrt{2}\frac{z}{|z|},$$

ovvero abbiamo ottenuto un'equazione algebrica del secondo ordine nell'incognita $t = \frac{z}{|z|}$, data da

$$\begin{cases} t^2 - \sqrt{2}t + 1 = 0, \\ |t| = 1, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{4}}.$$

Abbiamo quindi che, tutte le soluzioni non nulle dell'equazione in esame, devono verificare

$$\frac{z}{|z|} = e^{\pm i\frac{\pi}{4}},$$

ovvero, tutte le soluzioni non nulle saranno i numeri complessi che in coordinate polari si scrivono come

$$z = \rho e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, \rho > 0.$$

In definitiva, l'insieme delle soluzioni è dato da

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \rho \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right), \rho > 0 \right\}.$$

◇

Esercizio 7. Risolvere in \mathbb{C}^2 il seguente sistema

$$\begin{cases} z^2 + w = 1 \\ 2\bar{w} + iz = 2 \end{cases}$$

Soluzione Partiamo considerando la seconda equazione ed osservando che

$$2\bar{w} + iz = 2 \iff \overline{2w + i\bar{z}} = \bar{2} \iff 2w - i\bar{z} = 2$$

per cui il sistema iniziale è equivalente al seguente

$$\begin{cases} z^2 + w = 1 \\ 2w - i\bar{z} = 2 \end{cases}$$

ovvero, ricavando w in funzione di z dalla seconda equazione, si ha

$$\begin{cases} z^2 + \frac{i}{2}\bar{z} = 0 \\ w = \frac{i}{2}\bar{z} + 1 \end{cases}$$

La prima equazione coinvolge la sola incognita (complessa) z e può essere quindi facilmente risolta ponendo $z = x + iy$: sviluppando si ottiene

$$x^2 - y^2 + \frac{y}{2} + ix\left(2y + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

quindi otteniamo al solito un'equazione per la parte reale x ed un'equazione per la parte immaginaria y , ovvero la precedente è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \frac{y}{2} = 0 \\ x\left(2y + \frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono quindi date da

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

da cui, ricordando che $z = x + iy$, si ottengono le z (e quindi le w) che sono soluzioni del sistema di partenza. In definitiva, l'insieme delle soluzioni sarà dato dalle seguenti coppie di numeri complessi

$$S = \left\{ (z_1, w_1) = (0, 1), (z_2, w_2) = \left(\frac{1}{2}i, \frac{5}{4}\right), (z_{3,4}, w_{3,4}) = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}, \frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{3}}{8}i\right) \right\}.$$

◇

Esercizio 8. Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$|z|^2 + z^2 - iz - 1 = 0.$$

Soluzione Si ponga al solito $z = x + iy$, l'equazione di partenza diventa

$$x^2 + y^2 + x^2 - y^2 + 2ixy - ix + y - 1 = 0$$

ovvero separando parte reale e parte immaginaria si ha

$$\begin{cases} 2x^2 + y = 1 \\ 2xy - x = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 1/2 \\ x = \pm 1/2 \end{cases}$$

quindi le soluzioni dell'equazione di partenza sono date da

$$S = \left\{ z_1 = i, z_{2,3} = \frac{i \pm 1}{2} \right\}.$$

◇