Esercizio 1 - C

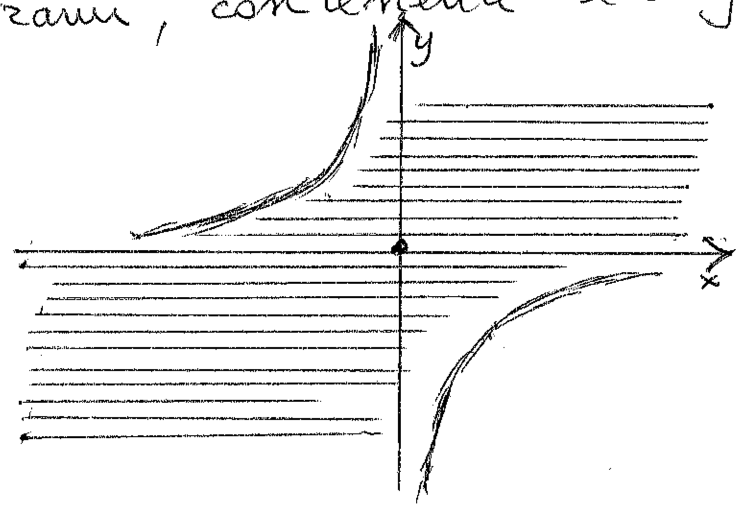
(i) Il dominio della funzione

$$f(x,y) = x+y-5\log(6+xy)$$

è l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6+xy>0\}$;
ovvero, data l'iperbole di equazione

$$xy = -6,$$

la zona del piano delimitata dai 2 suoi rami, contenente l'origine.



(ii) In D f è infinitamente derivabile.
Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{5y}{6+xy}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \frac{5x}{6+xy};$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x = y \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$ In $P_1 = (2,2)$ è

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{5y^2}{(6+xy)^2} & -\dfrac{30}{(6+xy)^2} \\ \dfrac{-30}{(6+xy)^2} & \dfrac{5x^2}{(6+xy)^2} \end{pmatrix}_{x=y=2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/5 & -3/10 \\ -3/10 & 1/5 \end{pmatrix} ; \quad \det H(P_1) = -1/20 ;$$

dunque P_1 è punto di sella. Analogamente, se $P_2 = (3,3)$

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/15 \\ -2/15 & 1/5 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori risolvono l'equazione

$$9(1-5\lambda)^2 - 4 = 0$$

cioè $\lambda = \begin{cases} 1/3 \\ 1/15 \end{cases}$. Pertanto P_2 è di minimo locale.

(iii) Poiché $f(x,0) = x - 5\log 6$ è crescente e tende a $+\infty$ al tendere di x a $+\infty$ ed, analogamente $f(0,y) = y - 5\log 6$ è crescente e tende a $+\infty$ al tendere di y a $+\infty$, si ha

$$\sup_Q f(x,y) = +\infty$$

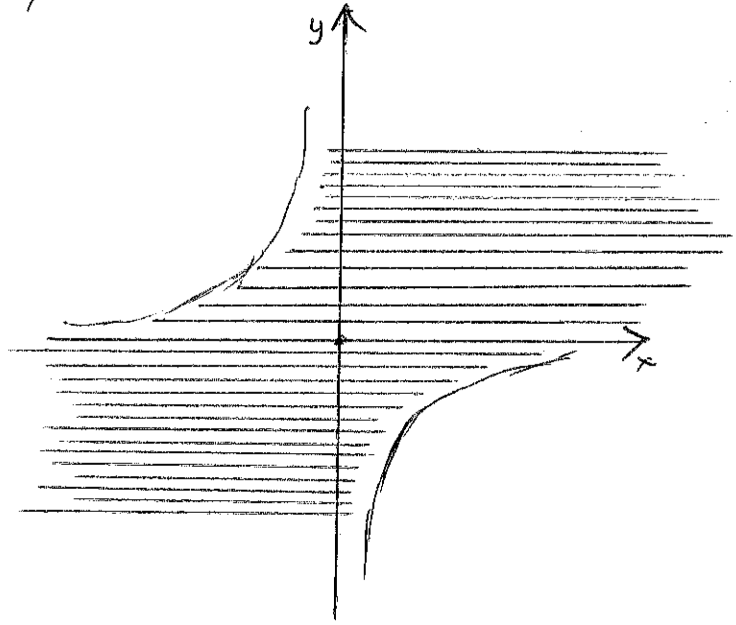
e tenendo conto del punto (ii)

$$\inf_Q f(x,y) = \min\left(f(0,0), f(P_2)\right) = f(0,0) = -5\log 6,$$

minimo di f in Q

Esercizio 1 – E

(i) Il dominio della funzione
$$f(x,y) = 3\log(2+xy) - x - y$$
è l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2+xy > 0\}$;
ovvero, data l'iperbole di equazione
$$xy = -2,$$
la zona del piano delimitata dai 2 suoi rami, contenente l'origine.



ii) Si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{3y}{2+xy} - 1 \;,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3x}{2+xy} - 1 \;;$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x = y \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} . \quad \text{In } P_1 = (1,1) \text{ è}$$

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{-3y^2}{(2+xy)^2} & \dfrac{6}{(2+xy)^2} \\[2ex] \dfrac{6}{(2+xy)^2} & \dfrac{-3x^2}{(2+xy)^2} \end{pmatrix}_{x=y=1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \quad \det H(P_1) = -1/3$$

dunque P_1 è di sella. Inoltre,

se $P_2 = (2,2)$

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/6 \\ 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori risolvono l'equazione

$$4(1+3\lambda)^2 - 1 = 0$$

cioè $\lambda = \begin{cases} -1/12 \\ -1/6 \end{cases}$. Pertanto P_2 è di massimo locale.

(iii) $f(x,0) = 3\log 2 - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ $\quad$ $f(x,0)$ decrescente

$f(0,y) = 3\log 2 - y \xrightarrow[y\to+\infty]{} -\infty$ $\quad$ $f(0,y)$ decrescente

Dunque $\inf_Q f(x,y) = -\infty$

e

$$\sup_Q f(x,y) = \max\big(f(0,0), f(P_2)\big) = f(0,0) = 3\log 2$$

massimo di f in Q.