Soluzioni [1]

1.

$$\log x_n = n \log \frac{1+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}} = n\left(\log\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{n^3}\right) - \log\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}\right) \right)$$

Utilizziamo la formula di Taylor della funzione log (1 + x) di punto iniziale 0 e al secondo ordine, scrivendo 1/n invece di x:

$$n\left(\frac{\mu}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{n^2}+\frac{1}{3}\frac{\mu^3}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}-\frac{9}{2n^2}+\frac{9}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) =$$

$$(\mu-3) + \frac{9-\mu^2}{2n} + \frac{\mu^3-30}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

In conclusione:

se $\mu \neq 3$ $\log x_n \to \mu - 3$ e dunque $x_n \to e^{\mu-3}$

se $\mu = 3$ $\log x_n \approx -1/n^2 \to 0$ e dunque $x_n \to 1$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log x_n$ converge solo se $\mu = 3$ perché equivalente ad una serie armonica di potenza maggiore di 1; negli altri casi non è verificata la condizione necessaria per la convergenza, dato che il termine generale della serie non è infinitesimo.

2.

$x = 0$ non è soluzione dell'equazione per nessun valore di λ ; possiamo dunque dividere ambo i membri dell'equazione per x : $e^{2x} / x = \lambda$.

Studiamo la funzione $f(x) = e^{2x} / x$ nel suo C.E. che è R – 0.

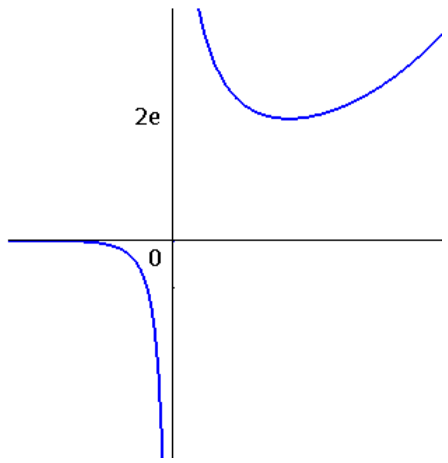
SGN positiva per x > 0, negativa per x < 0

LIM per $x \to 0^{\pm}$ $f(x) \to \pm\infty$

per $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$

per $x \to -\infty$ $f(x) \to 0$

DRV $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$ positiva per x > ½ ; f (½) = 2 e.



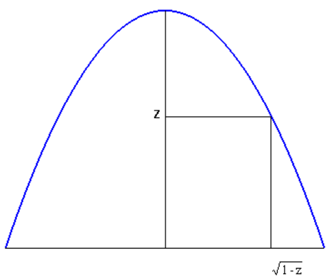
Due soluzioni se $\lambda > 2$ e

una soluzione se $\lambda = 2$ e

nessuna se $0 \le \lambda < 2$ e

una soluzione se $\lambda < 0$.

3.



$\sqrt{1-z}$ è la lunghezza di metà lato del quadrato posto alla quota z , con z che varia tra 0 ed 1.

Il volume richiesto è dunque dato da:

$$\int_0^1 4(1-z)\,dz = 2$$

Soluzioni [2]

1.

$$\log x_n = n \log \frac{1+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}} = n\left(\log\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{n^3}\right) - \log\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}\right)\right)$$

Utilizziamo la formula di Taylor della funzione log (1 + x) di punto iniziale 0 e al secondo ordine, scrivendo 1/n invece di x:

$$n\left(\frac{\mu}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{n^2}+\frac{1}{3}\frac{\mu^3}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}-\frac{2}{n^2}+\frac{8}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) =$$

$$(\mu-2) + \frac{4-\mu^2}{2n} + \frac{\mu^3-14}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

In conclusione:

se $\mu \neq 2$ $\log x_n \to \mu - 2$ e dunque $x_n \to e^{\mu-2}$

se $\mu = 2$ $\log x_n \approx -2/n^2 \to 0$ e dunque $x_n \to 1$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log x_n$ converge solo se $\mu = 2$ perché equivalente ad una serie armonica di potenza maggiore di 1; negli altri casi non è verificata la condizione necessaria per la convergenza, dato che il termine generale della serie non è infinitesimo.

2.

Possiamo riscrivere l'equazione nella forma : $x / e^{3x} = \lambda$.

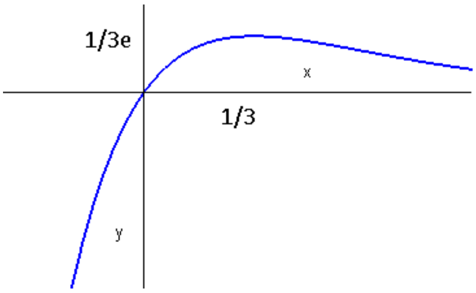
Studiamo la funzione $f(x) = x / e^{3x}$ nel suo C.E. che è R.

SGN positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$

LIM per $x \to +\infty$ $f(x) \to 0$

per $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$

DRV $f'(x) = \dfrac{1-3x}{e^{3x}}$ positiva per $x < 1/3$; $f(1/3) = 1/3e$.



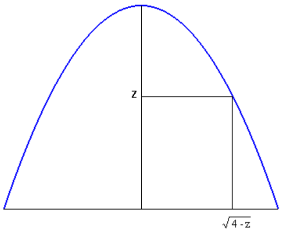
Nessuna soluzione se $\lambda > 1 / 3e$

una soluzione se $\lambda = 1 / 3e$

due soluzioni se $0 < \lambda < 1 /3e$

una soluzione se $\lambda \leq 0$.

3.



$\sqrt{4 - z}$ è la lunghezza di metà lato del quadrato posto alla quota z , con z che varia tra 0 ed 4.

Il volume richiesto è dunque dato da:

$$\int_0^4 4\,(4 - z)\,dz = 32.$$