Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
QUARTO FOGLIO DI ESERCIZI
11 dicembre 2014

Esercizi sulle funzioni continue.

1. Dire per quali valori del parametro λ le seguenti funzioni sono continue in $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda & x \leq 0 \\ \frac{\sin x^2}{x \log(1-2x)} & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} (x+\lambda)^2 & x \leq 0 \\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-3x} - \cos x} & x > 0 \end{cases}$$

2. Dimostrare che un polinomio dispari ammette sempre almeno una radice reale.

3. Dimostrare che il polinomio $p(x) = x^9 + x^5 + 3x^3 - x$ ammette esattamente tre radici reali.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(x) \geq x^2 - 1$. Provare che f ammette minimo ma non ammette massimo.

5. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

allora f ammette massimo **o** minimo. Esibire un esempio di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfi le ipotesi qui sopra, ma che non ammetta minimo.

6. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Mostrare che esiste $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x_0) = x_0$.

7. Mostrare che l'equazione $7 + 2x + \sin x = 0$ ammette soluzione. Provare che tale soluzione e' unica.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$|f(x) - f(x')| < \frac{1}{2}|x - x'| \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = x_0$.

Bonus level.

1. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n+n^2}-1}{\sqrt[n]{n+n^3}-1}$$

2. Si consideri la successione definita per ricorrenza da
$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{5+2\sin^2 x_n}{\sqrt{x_n}}$$
Calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

3. Si consideri la successione definita per ricorrenza da
$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = 1-\cos(x_n)$$
   (i) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.
   (ii) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} n!x_n$.
   (iii) Dire se la successione delle somme parziali $\sum_{j=0}^{n} x_j$ converge ad un limite finito quando $n \to +\infty$.

4. Sia a_n una successione di numeri non negativi tali che
$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$
Mostrare che allora a_n ammette limite finito e
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \inf \frac{a_n}{n}.$$