

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile  
**Correzione della parte II.A del compito 17dic2014.**

**Es. 1.**

Sia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la successione definita da

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + 2}{3}}$$

- (i) calcolare l'estremo inferiore e superiore della successione, specificando se si tratta di massimo e minimo;
- (ii) Calcolare, se esiste,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

La funzione  $f(x) := \sqrt{\frac{x^2+2}{3}}$  (che definisce la ricorsione) ha le proprietà seguenti:

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è pari;
- (b)  $f$  è strettamente crescente sull'intervallo  $[0, +\infty[$ ;
- (c)  $f(x) \geq f(0) = \sqrt{\frac{2}{3}} > 0$ ;
- (d)  $f(x) > x$  se  $x \in [0, 1)$ ,  $f(1) = 1$  e  $f(x) < x$  per  $x \in ]1, +\infty[$ ;
- (e)  $f : [0, 1[ \rightarrow [f(0), 1[ \subset [0, 1[$ .

Le proprietà (a), (b), (c) sono di immediata verifica, la proprietà (d) segue da un semplice conto mentre la proprietà (e) è conseguenza della (c):

$$x \in [0, 1) \Rightarrow f(x) \in [f(0), f(1)[ = [f(0), 1[.$$

Sappiamo che  $x_{n+1} = f(x_n)$ ; e visto che  $f : [0, 1[ \rightarrow [0, 1[$  e  $x_0 = 0 \in [0, 1[$  possiamo facilmente dimostrare per induzione che

$$x_n \in [0, 1[ \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Inoltre dalla proprietà (d) segue che  $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$ , cioè  $x_n$  è strettamente crescente. Ne segue che  $x_n \geq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$ , e dunque

$$x_0 = \min\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \inf\{x_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

D'altronde  $x_n$  non ha massimo (perché  $x_n$  è strettamente crescente) inoltre, posto  $\ell := \sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  si ha che  $\ell \geq x_1 > 0$ ,  $\ell \leq 1$  (perché da (1) segue che 1 è un maggiorante) e  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  (perché una successione monotona crescente converge al proprio estremo superiore). Ma, per la continuità della funzione  $f$  il limite  $\ell$  deve essere un punto fisso per  $f$ , cioè

$$f(\ell) = \ell.$$

Per la proprietà (d) l'unico valore positivo che soddisfa questa equazione è  $\ell = 1$ ; pertanto

$$\sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

**Es. 2.**

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2 + \sin x} - \cos \sqrt{x + \tan x}}{x(\log \sin(4x) - \log(5x))}$$

Sottraendo e sommando 1 al numeratore possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2 + \sin x} - \cos \sqrt{x + \tan x}}{x(\log \sin(4x) - \log(5x))} &= \frac{[e^{x^2 + \sin x} - 1] + [1 - \cos \sqrt{x + \tan x}]}{x(\log \sin(4x) - \log(5x))} \\ &= \frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} \end{aligned}$$

dove

$$f(x) := e^{x^2 + \sin x} - 1, \quad g(x) := 1 - \cos \sqrt{x + \tan x}, \quad h(x) := x(\log \sin(4x) - \log(5x)).$$

Osserviamo ora che per  $x \rightarrow 0^+$  si ha che

$$f(x) = e^{x^2 + \sin x} - 1 \sim x^2 + \sin x \sim x,$$

$$g(x) = 1 - \cos \sqrt{x + \tan x} \sim \frac{(\sqrt{x + \tan x})^2}{2} \sim \frac{x + \tan x}{2} \sim x$$

D'altra parte per  $x \rightarrow 0^+$  si ha anche

$$h(x) = x(\log \sin(4x) - \log(5x)) = x \log \frac{\sin(4x)}{(5x)} \sim x \log \frac{4}{5}$$

Per il principio di sostituzione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x \log \frac{4}{5}} = \frac{1}{\log \frac{4}{5}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x \log \frac{4}{5}} = \frac{1}{\log \frac{4}{5}}$$

Quindi, per il teorema del limite della somma, il limite di partenza vale  $\frac{2}{\log \frac{4}{5}}$ .

**Es. 3.**

Si consideri la successione

$$x_n := \left( \frac{3n+1}{3n-1} \right)^{n^2}$$

(i) Calcolare  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

(ii) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} x_n.$$

(i) Possiamo riscrivere la successione nel modo seguente

$$x_n = \exp\left(n^2 \log \frac{3n+1}{3n-1}\right);$$

per studiare il comportamento di  $x_n$  basta quindi studiare l'argomento dell'esponenziale.

Osserviamo che, per  $n \rightarrow +\infty$  si ha

$$n^2 \log \frac{3n+1}{3n-1} = n^2 \log\left(1 + \frac{2}{3n-1}\right) \sim \frac{2n^2}{3n-1} \sim \frac{2}{3}n.$$

Di conseguenza l'argomento dell'esponenziale diverge a  $+\infty$  e  $x_n \rightarrow +\infty$ .

(ii) Procedendo come al punto precedente scriviamo

$$2^{-n} x_n := \exp\left(n^2 \log \frac{3n+1}{3n-1} - n \log 2\right). \quad (2)$$

Per quanto visto in precedenza si ha che, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$n^2 \log \frac{3n+1}{3n-1} - n \log 2 \sim n\left(\frac{2}{3} - \log 2\right).$$

Dato che  $\log 2 > 2/3$  si ha che l'argomento dell'esponenziale al membro destro dell'equazione (2) diverge a  $-\infty$ , pertanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} x_n = 0$ .